



Universidade Federal
do Rio de Janeiro

Escola Politécnica

TEORIA DAS OPÇÕES REAIS: A APLICAÇÃO DESSA FERRAMENTA NA
ANÁLISE DE INVESTIMENTOS DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO NO
SETOR DE PETRÓLEO E GÁS NATURAL

Raphael de Moura Japiassú Gonçalves

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia de Produção da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Regis da Rocha Motta

Rio de Janeiro
Abril de 2016

TEORIA DAS OPÇÕES REAIS: A APLICAÇÃO DESSA FERRAMENTA NA
ANÁLISE DE INVESTIMENTOS DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO NO
SETOR DE PETRÓLEO E GÁS NATURAL

Raphael de Moura Japiassú Gonçalves

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO DA ESCOLA POLITÉCNICA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO
DE PRODUÇÃO.

Examinado por:

Prof. Regis da Rocha Motta, Ph.D.

Prof.^a Thereza Cristina Nogueira de Aquino, D. Sc.

Prof. Cesar das Neves, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

ABRIL DE 2016

Gonçalves, Raphael de Moura Japiassú;

Teoria das Opções Reais: a aplicação dessa ferramenta na análise de investimentos de pesquisa e desenvolvimento no setor de petróleo e gás natural / Gonçalves, Raphael de Moura Japiassú. – Rio de Janeiro: UFRJ / Escola Politécnica, 2016.

XI, 70 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Regis da Rocha Motta

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia de Produção, 2016.

Referências Bibliográficas: p.66.

1. Teoria das Opções Reais. 2. Pesquisa e Desenvolvimento. 3. Petróleo e Gás Natural. 4. Investimentos. I. Motta, Regis. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Curso de Engenharia de Produção. III. Teoria das Opções Reais: a aplicação dessa ferramenta na análise de investimentos de pesquisa e desenvolvimento no setor de petróleo e gás natural.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus, que age todos os dias em minha vida e me dá a força necessária para seguir sempre em frente.

Agradeço imensamente aos meus pais, por todo o apoio que me deram, não só na faculdade, mas durante toda a minha vida, por não medirem esforços por mim e por meus irmãos. Faltam só dois.

Aos meus irmãos, que cresceram e viveram todas as experiências ao meu lado, me apoiando nos momentos mais felizes e menos felizes, e aos meus familiares, que sempre torceram e oraram por mim.

À Julia, por todos os momentos em que não estive presente, em que tive impaciência e apreensão. Obrigado por estar ao meu lado todos esses anos, em qualquer circunstância, e por ser tão grande exemplo para mim.

Gostaria de agradecer também a todos os meus amigos que sempre me apoiaram e acreditaram em mim, mesmo quando eu estive afastado.

Por fim, gostaria de agradecer ao Prof. Regis Motta, por orientar e tornar este trabalho possível e, em especial, por ter me despertado o interesse de estudar as metodologias de análises e por ter me dado sempre bons conselhos de vida.

Agradeço o apoio recebido da ANP que, através do PRH-21, patrocinou minha pesquisa durante últimos semestres de faculdade. Essa parceria entre a ANP e o Curso de Engenharia de Produção da UFRJ foi fundamental para despertar o meu interesse pelo setor de petróleo.

“Referi-vos essas coisas para que tenhais a paz em mim.
No mundo haveis de ter aflições. Coragem! Eu venci o mundo”
(Jo, 16:33)

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro de Produção.

Teoria das Opções Reais: a aplicação dessa ferramenta na análise de investimentos de pesquisa e desenvolvimento no setor de petróleo e gás natural

Raphael de Moura Japiassú Gonçalves

Abril/2016

Orientador: Regis da Rocha Motta

Curso: Engenharia de Produção

O processo de tomada de decisão de investimentos em projetos classicamente se dá através da análise do valor presente líquido (VPL). Entretanto, essa análise não leva em consideração a flexibilidade gerencial, em que o investidor pode tomar determinadas atitudes ao longo da vida útil do projeto, de forma a maximizar seus ganhos e minimizar suas perdas. Assim, a análise de investimentos usando a Teoria das Opções Reais (TOR) encaixa-se nesse ponto, pois leva em conta a não passividade do investidor perante novas informações que ele obtém. Levando em conta projetos de P&D em O&G, essa teoria abrange diversas especificidades desse tipo de projeto de investimentos. Então, este trabalho tem como objetivo entender o contexto da indústria, as características dos projetos de P&D, no setor petrolífero, e a aplicação de um modelo para análise de investimentos, usando a Teoria das Opções Reais, levando em consideração o imenso montante a ser investido referente à cláusula de participação especial, da Lei do Petróleo.

Palavras-chave: Teoria das Opções Reais, P&D, Petróleo e Gás Natural, Investimentos.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

Real Options Theory: the application of this tool on investment's analysis of R&D projects in oil and gas industry
Raphael de Moura Japiassú Gonçalves

Abril/2016

Advisor: Regis da Rocha Motta

Course: Industrial Engineering

The process of investment decision making on projects is classically the analysis of the net present value (NPV). However, this analysis does not take into account the managerial flexibility, in which the investor can take certain actions over the useful life of the project in order to maximize his gains and minimize his losses. Thus, investment analysis using Real Options Theory (ROT) fits this point because it takes into account the non-passive investor that could act before the losses, using new information as long as he gets it. Taking into account R&D projects in O&G, this theory covers several specific characteristics of this type of investment project. So, this study aims to understand the industry context, the characteristics of R & D projects in the oil and gas sector, and the application of a model for investment analysis, using the Real Options Theory, taking into account the huge amount to be invested regarding the special participation clause of the “Lei do Petróleo”.

Keywords: Real Options Theory, R&D, Oil and Gas, Investments.

Sumário

Contextualização do Trabalho	8
Objetivos.....	9
Metodologia.....	9
Estrutura do Trabalho	10
1. INVESTIMENTOS SOB INCERTEZA	11
1.1 As bases do investimento produtivo	11
1.2 Os dois tipos de incerteza	13
1.3 A Flexibilidade Gerencial e as Limitações do FCD	14
1.4 As Regras de Decisão do FCD e da Teoria das Opções	16
2. A TEORIA DAS OPÇÕES REAIS: ORIGEM NO MERCADO FINANCEIRO	18
2.1 Derivativos.....	19
2.2 Tipos de Opções Financeiras	21
2.3 Posições em opções	23
2.4 Fatores que afetam o preço das opções.....	24
2.5 Prêmio de uma opção: modelos de avaliação	27
2.5.1 Modelo Binomial.....	27
2.5.2 Modelo Black & Scholes.....	35
3. A TEORIA DAS OPÇÕES REAIS.....	41
3.1 Opções Reais e Opções Financeiras	41
3.2 Principais tipos de opções.....	45
3.3 Interações entre opções.....	47
4. As opções reais em P&D.....	49
4.1 Estrutura do processo de P&D.....	50
4.2 P&D no setor de petróleo e gás	52
4.3 O modelo de Geske para projetos de P&D em O&G	55
5. Estudo de caso	58
5.1 Definição do projeto	58
5.2 Variáveis do projeto.....	60
5.3 Aplicação do modelo	61
6. CONCLUSÃO.....	65
Bibliografia.....	66
Anexo I.....	69

INTRODUÇÃO

Contextualização do Trabalho

A indústria de petróleo e gás natural (O&G) sempre foi um segmento em que os termos “investimento e retorno” foram cruciais ao sucesso. Caracterizada por projetos que apresentam altos investimentos e retornos incertos, esse setor tem grande necessidade de conhecer e utilizar metodologias de análise de investimentos, visando desenvolver projetos economicamente atraentes. Esse tema se tornou ainda mais relevante, dada a recente queda dos preços dos barris de petróleo, tornando a otimização de resultados econômicos um ponto unânime em toda a indústria.

Considerando os projetos de pesquisa e desenvolvimento (P&D) do setor de O&G, a Resolução ANP nº 50/2015 e o Regulamento Técnico ANP nº 3/2015, atualizada recentemente mas já em vigor desde o ano de 1998, definem que uma parcela de 1% da receita bruta, obtida pelas empresas concessionárias, na produção de petróleo, gás natural e outros hidrocarbonetos fluidos, deve ser investida em P&D, o que caracteriza montantes bastante significativos. Se fortalece então a necessidade de metodologias de análise de investimentos que compreendam todos os fatores em questão.

Paralelo a isso, nas últimas décadas, a Teoria das Opções Reais vem substituindo os métodos tradicionais de análise de investimentos como Fluxo de Caixa Descontado (FCD), principalmente para decisões com horizontes de mais de um período. Isso se dá porque a análise de Opções Reais leva em conta o que esses métodos não consideraram nem conseguem considerar: o valor da flexibilidade.

Essa teoria pode ser aplicada a qualquer tipo de indústria ou setor produtivo, desde que envolva decisões sob cenários incertos. Em especial, aplica-se a projetos de P&D no setor de O&G, já que se trata de projetos i) de importância para o desenvolvimento econômico e financeiro das empresas e ii) com alto grau de incerteza envolvido em seu desenvolvimento.

Assim, o cenário apresentado no setor de O&G tem se mostrado propício à aplicação das Opções Reais (OR) aos projetos de P&D, visando melhores decisões de investimentos e maiores retornos.

Objetivos

O objetivo central deste trabalho é aplicar a Teoria das Opções Reais a projetos de P&D no setor de petróleo de gás. Para isso, alguns pontos serão abordados ao longo do trabalho:

- Entender o conceito de investimento produtivo e os fatores mais relevantes;
- Entender por que os métodos clássicos de análise de investimentos não captam todo o valor de uma oportunidade;
- Entender o conceito de Opções Financeiras e fazer o paralelo com Opções Reais;
- Entender a Teoria das Opções Reais, seus tipos e modelos;
- Entender as características dos projetos de P&D em O&G;
- Compreender qual lógica de Opções Reais melhor se adequa a esse tipo de projeto;
- Elaborar um estudo de caso de uma oportunidade de investimento em um projeto de P&D, em uma empresa do setor petrolífero, de forma a mostrar as vantagens de utilizar tal metodologia.

Metodologia

Para se alcançar os objetivos propostos, o trabalho foi feito com base em pesquisas bibliográficas em livros, bases de conhecimento e sites na internet, tendo como temas centrais Opções Reais e projetos de pesquisa e desenvolvimento (P&D), no segmento de petróleo e gás natural (O&G).

Com isso, primeiramente, a pesquisa focou em gerar conhecimento a respeito de investimentos sob incerteza e os principais conceitos que os definem. A partir disso, a

pesquisa inclui o tema da Teoria das Opções Reais, de forma a criar um paralelo com métodos tradicionais de análise de investimentos.

Por fim, a pesquisa inclui as características e fatores relevantes dos projetos de P&D e, especificamente, a aplicação da Teoria das Opções Reais à tomada de decisão em projetos de P&D no setor de O&G, buscando um modelo que fosse mais adequado a esse tipo de projeto e apresentando um estudo de caso no setor.

É válido ressaltar que a pesquisa do presente trabalho possui algumas limitações. O tema de Opções Reais tem profunda base matemática, estatística e financeira. Neste trabalho, não se buscou aprofundar em demonstrações. Além disso, o setor de O&G tem característica de ter dados estratégicos, principalmente em se tratar de dados de P&D. Assim, é razoavelmente difícil conseguir dados reais para exemplos e estudos de caso, sendo necessário muitas vezes utilizar hipóteses consideradas razoáveis, dado o mercado nesse setor.

Estrutura do Trabalho

O trabalho está dividido em quatro partes. O primeiro capítulo tem como objetivo estabelecer as bases do investimento produtivo, seus requisitos práticos e as limitações dos métodos clássicos de análise de investimento, iniciando o conceito de opções reais.

O segundo capítulo tem como objetivo explicitar as opções financeiras, mostrando a lógica de derivativos, os principais fatores e modelos matemáticos para essas opções.

O terceiro capítulo tratará das Opções Reais em si, estabelecendo o paralelo com as opções financeiras, ponto de sua origem, apresentando seu funcionamento e principais tipos estudados na literatura.

O quarto capítulo fará análise da aplicação de Opções Reais em projetos de P&D, buscando entender na literatura os melhores modelos e encontrar um modelo capaz de atender as características desse tipo de projeto.

O quinto capítulo fará um estudo de caso de uma oportunidade de investimento num projeto de P&D, em uma empresa petrolífera, de forma a realizar uma análise, usando conceitos de todo o trabalho, de como essa metodologia se adequa ao problema.

1. INVESTIMENTOS SOB INCERTEZA

1.1 As bases do investimento produtivo

Um investimento pode ser definido como o ato de incorrer em custos imediatos na expectativa de benefícios futuros (DIXIT e PINDYCK, 1994). Assim, para que se tome a decisão de investir na data atual é preciso ter a esperança de retorno em uma data futura. Análogo ao retorno de uma ação, o retorno de um investimento pode ser decomposto em duas parcelas aditivas: os dividendos mais o ganho de capital. Como exemplo, investindo em uma jazida petrolífera, a cada instante de operação do campo, o dividendo é o fluxo de receitas que advém da comercialização da produção enquanto que o ganho de capital é a valorização (ou desvalorização) do ativo, no caso, o volume recuperável de hidrocarbonetos que ainda não foi extraído, em virtude da evolução do preço do barril de petróleo no mercado.

Toda a teoria de investimento sob incerteza está baseada em três pilares: irreversibilidade, incerteza e *timing* (DIAS, 2014). Essas três características são de grande importância e estão normalmente presentes em investimentos produtivos, e serão descritas de forma sucinta a seguir.

De maneira geral, os investimentos são irreversíveis. A irreversibilidade pode ser considerada total ou parcial, variando assim a recuperação de capital investido, no caso de arrependimento de decisão. No setor de petróleo, por exemplo, um investimento totalmente irreversível é a perfuração de um poço seco, já que o custo das operações de perfuração não seria recuperado no caso de insucesso. Já no caso de um projeto de P&D, por exemplo, ativos como microcomputadores, instrumentos eletrônicos e edifícios podem ser utilizados em outros projetos, mas passam a ter um valor abaixo do valor investido inicialmente.

Considerando isso tudo, vê-se que a maior parte do custo de investimento é um custo afundado, em inglês, *sunk cost*. Assim, a opção de espera ganha valor. Um investimento irreversível deve ser feito somente quando a probabilidade de insucesso é

suficientemente pequena. Em geral, exceto em casos de investimentos do tipo “agora ou nunca”, a espera é reversível e naturalmente uma opção a ser considerada pelo investidor.

O segundo ponto crucial da teoria é a incerteza. Em projetos de P&D em O&G, esta incerteza se dá na parte de receitas de maneira muito clara, pois sendo esses projetos na grande maioria dos casos onde o retorno não se dá no curto prazo, diversos fatores afetam o retorno do capital investido. Isto é, um projeto que apresenta um VPL apenas pouco positivo, tem uma razoável probabilidade de apresentar resultados negativos alguns anos depois. Outra fonte de incerteza são os custos, especialmente de bens de capital específicos da indústria de petróleo, cuja demanda e cujos preços acompanham fortemente as oscilações do preço do barril. Estas são as chamadas incertezas econômicas, das quais o investidor não tem controle, ou seja, é um risco sistêmico ou não-diversificável por parte do tomador de decisão.

Outro tipo de incerteza é a técnica. Um exemplo de incerteza técnica é o caso de projetos que utilizam novas tecnologias, com equipamentos que são fabricados pela primeira vez ou técnicas de operação nunca antes utilizadas. Outro exemplo de incerteza técnica é a que se dá no processo de P&D, em que cada avanço precisa ser testado e uma eventual falha pode significar retrabalho ou até desistência da linha de pesquisa. Ao contrário das econômicas, as incertezas técnicas podem ser afetadas por decisões do investidor.

O *timing* do investimento é a terceira característica relevante, embora muitas vezes subestimada. O gerente deve decidir se é melhor investir já ou se é melhor aguardar por novas informações e/ou melhores condições. Raramente um investimento é do tipo “agora ou nunca”.

Um bom exemplo é o do cenário de E&P de petróleo no Brasil. Há alguns anos, no cenário de monopólio estatal brasileiro das atividades de E&P, podia-se, teoricamente, aguardar o tempo que desejasse para investir em um campo. Já num cenário competitivo, após a quebra do monopólio, as empresas disputam os blocos ofertados em licitações (*rounds*) promovidas pelo governo, mais especificamente pela Agência Nacional de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP). A empresa vencedora passa a deter a concessão do bloco, ou seja, um monopólio temporário sobre ele, com o direito de explorá-lo por um período de tempo limitado, estipulado pelo Edital de Licitação e com

duração geralmente entre 5 e 10 anos. Se ao fim do prazo, não tiver havido investimento, o bloco é devolvido ao governo para uma futura licitação. Com esta mudança na regulamentação do setor, o valor do tempo de espera passou a ser significativo.

Em resumo, quando num ambiente de incerteza, o cálculo do momento certo para realizar um investimento irreversível, de forma que o projeto tenha uma probabilidade de sucesso adequada, é de extrema importância, para que se maximize a riqueza da organização.

1.2 Os dois tipos de incerteza

Como descrito no item anterior, um investimento como um projeto de P&D em O&G envolve dois tipos de incertezas, as de viés econômico e as de viés técnico. Segundo Schumacher (2002), essa nomenclatura e abordagem são análogas aquelas adotadas em portfólios financeiros, de risco não-diversificável (sistemático) e risco diversificável (não-sistemático).

A incerteza econômica está relacionada aos movimentos gerais do mercado e sujeitos aos acontecimentos aleatórios, tais como recessão ou aquecimento da economia. Quanto mais distante for o futuro que se tenta prever, mais incerta é esta previsão. Um exemplo é a incerteza nos preços futuros do barril de petróleo, que dependem de fatores exógenos a um dado projeto, como a instabilidade geopolítica no Oriente Médio ou níveis de produção adotados pelos países membros da OPEP (Organização Mundial dos Países Exportadores de Petróleo). Assim, a incerteza econômica é exógena ao processo de decisão de uma empresa, ou seja, aprende-se esperando (*learning by waiting*) e não investindo.

Não é possível diversificar totalmente esse tipo de incerteza. Isto afeta negativamente os investimentos, pois quanto maior a incerteza envolvida, mais as empresas irão esperar antes de investirem, ou exigirão prêmios mais elevados como recompensa ao elevado risco incorrido. Muitos projetos com VPL pouco maior que zero serão postergados, e só serão realizados projetos com VPL bem maiores que zero.

De maneira contrária, a incerteza técnica não é correlacionada aos movimentos econômicos, ou seja, as possibilidades de desvio da variável em relação ao valor esperado

não mudam se, por exemplo, a economia sai de uma recessão e entra em fase de crescimento. Exemplos de incerteza técnica mencionados anteriormente são os volumes de reservas de petróleo ou gás natural e o investimento em novas tecnologias. Projetos de E&P e de Pesquisa e Desenvolvimento (P&D) são casos típicos em que essa incerteza desempenha um papel dominante.

. Uma característica fundamental da incerteza técnica é que a realização de investimentos reduz este tipo de incerteza, ou seja, a incerteza diminui com a experiência adquirida ao longo do tempo e da prática de outros projetos. Sendo assim, esta incerteza é endógena ao processo de decisão, ao contrário da incerteza econômica. A incerteza técnica incentiva o investimento passo a passo, no sentido da redução da variância da variável aleatória dessa incerteza (DIXIT e PINDYCK, 1994). Na incerteza técnica, se aprende fazendo ou investindo (*learning by doing*).

1.3 A Flexibilidade Gerencial e as Limitações do FCD

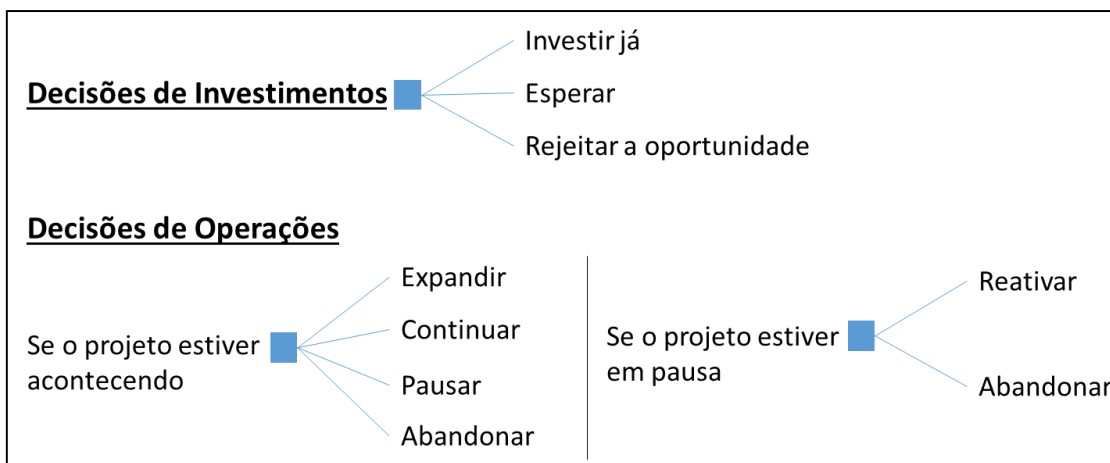
A Figura 1, mostra de forma esquemática a flexibilidade das decisões gerenciais em projetos de P&D. Estas decisões podem ser divididas em dois diferentes tipos: as decisões de investimento e as decisões de operação. Em ambos os casos, as decisões são tipicamente irreversíveis e envolvem custos significativos.

Os gerentes que tomam essas decisões têm de escolher entre alternativas de abandono definitivo do projeto (implicando em um custo de abandono não-desprezível), pausa provisória do projeto (aguardando, por exemplo, condições melhores do mercado), reativação ou até expansão (através do comprometimento de recursos, por exemplo). Essas decisões têm que ser tomadas com certa rapidez e são revistas frequentemente em função de novas informações que vão surgindo (um simples teste pode trazer resultados que mudem totalmente o curso do projeto).

Entretanto, segundo Cunha (2005), a prática de decisões gerenciais tem se mostrado contraditória com a teoria do método tradicional do FCD. As decisões “intuitivas” de executivos de sucesso, que contrariam a regra do FCD, ocorrem devido aos gerentes “sentirem” que o FCD não levou em conta certos aspectos (opções). Assim, suas decisões se justificam por considerações estratégicas, por razões de flexibilidade empresarial, por temerem que o projeto se torne inviável devido a uma pequena variação

negativa, por sentirem que pode chegar alguma informação relevante que altere significativamente a economicidade do projeto (opção de espera) e por previsões de comportamento futuro do mercado.

Figura 1 - As decisões gerenciais de investimento e de operação



Fonte: Elaboração própria, baseada em Cunha (2005, p. 10)

Diferentemente das opções, o método tradicional de FCD não considera o grau de liberdade que existe nas decisões dos gerentes (flexibilidade), nem a sua interação com a incerteza. Numa visão de um ponto de vista geral, segundo Cunha (2005) a Teoria das Opções Reais integra estratégia de negócios e finanças, além de elevar a importância da função do gerente na tomada de decisão, ao englobá-la em sua regra. Essa teoria preenche então lacunas deixadas pela teoria tradicional.

Com enfoque nos aspectos das decisões gerenciais, Brealey & Myers (2003) fazem uma comparação entre as duas teorias, argumentando que:

- i. A análise do FCD assume, de forma implícita, que a organização detém passivamente os seus ativos reais (projetos);
- ii. O método do FCD foi inicialmente desenvolvido para avaliação de ativos como títulos governamentais (*bonds*) e ações. Aqueles que investem nesses ativos pouco ou nada podem fazer para melhorar a rentabilidade do investimento. Entretanto, o detentor de uma opção precisa decidir se exerce (e quando exerce) ou não o direito que possui;

- iii. O FCD não aborda o valor da ação gerencial, que visa a maximização de resultados. Em situações favoráveis, ele maximiza os ganhos e, em situações desfavoráveis, minimiza as perdas;
- iv. O FCD ignora as opções que existem nos ativos reais. Os gerentes competentes podem agir de modo a obter vantagens com essas opções.

1.4 As Regras de Decisão do FCD e da Teoria das Opções

Após uma análise inicial do ponto de vista geral, as regras básicas de decisão do método do FCD são comparadas com as da Teoria das Opções Reais, no Quadro 1.

Quadro 1 – Comparação entre os métodos FCD e TOR.

Método do FCD	Método da Teoria das Opções Reais
Investir em todos os projetos com $VPL > 0$.	VPL geralmente é insuficiente para tomar a decisão de investimento, pois é necessário que o projeto seja suficientemente lucrativo (<i>deep in the money</i>) para que se invista
Rejeitar os projetos com $VPL < 0$.	É possível recomendar o investimento em projetos estratégicos, isto é, projetos com incerteza técnica ou com opção de expansão futura
Entre dois projetos mutuamente exclusivos, escolher o de maior VPL.	Frequentemente se escolhe projetos menores, mas que são suficientemente lucrativos para o seu porte.

Fonte: Elaboração própria

Outros indicadores econômicos do método do FCD, como a razão VPL por valor investido, podem, no máximo, dar uma ordenação entre os projetos, mas não diz qual projeto que deve ser feito e qual deve ficar esperando na carteira de projetos.

Assim, a análise de investimentos pela Teoria das Opções Reais fornece basicamente dois resultados: o valor da oportunidade de investimento (ou o valor da opção de investimento); e a regra de decisão, através do valor crítico ou de “gatilho” da variável estocástica (preço do petróleo, por exemplo) a partir do qual o investimento deve ser realizado (CUNHA, 2005).

Em análise ao primeiro resultado, se obtém um valor de oportunidade de investimento que é sempre maior ou igual ao VPL, já que inclui opções gerenciais presente no projeto, que têm valor e que não foram incluídas na análise do FCD. Segundo Trigeorgis (1993a), pode-se expressar da seguinte maneira:

$$\text{VPL estratégico} = \text{VPL estático (do FCD)} + \text{Valor da opções (de gestão ativa)}$$

Dessa forma, é possível dizer que o FCD subavalia o retorno dos investimentos. Como exemplo, quando se considera a opção de *timing*, tem-se que o valor da oportunidade é igual ao VPL tradicional mais o valor da opção de espera.

Ao analisar o segundo resultado fornecido pela TOR, tem-se que o valor crítico ou de “gatilho” da variável estocástica é o indicador que define a ação gerencial. No exemplo do preço do barril de petróleo, esse é o valor mínimo necessário para que seja ótimo o retorno sobre o investimento. O preço crítico é sempre maior do que o custo unitário de produção ou *break-even price* (valor no qual o VPL é nulo), usado na análise do FCD.

Pode se dizer que a aplicação do método do FCD recomenda uma quantidade de projetos maior do que seria ótimo. Os executivos de sucesso, para evitarem isso, usam taxas elevadas de desconto ou estabelecem restrições orçamentárias, de maneira a só fazerem os projetos de maior rentabilidade (*deep in the money*) ou projetos estratégicos (com opção de expansão, por exemplo).

Especificamente, em projetos de P&D, o ponto de vista do FCD é que esses só geram custos, não geram fluxos de caixa positivos. Então, por vezes, não são avaliados por práticas normais de avaliação, mas são designados como “projetos estratégicos”. Como exemplo, para projetos de teste de mercado (antes de introduzir novos produtos em escala industrial), que muitas vezes são rejeitados por terem VPLs negativos, usando taxas de desconto elevadas, “devido ao maior risco” (DIAS, 2014).

2. A TEORIA DAS OPÇÕES REAIS: ORIGEM NO MERCADO FINANCEIRO

Ao longo das últimas décadas, a dinâmica e a estrutura dos mercados financeiros passaram por uma grande transformação. Esse movimento se deu basicamente por dois motivos. Primeiro, por uma instabilidade econômica mundial pós-1970. Os choques do petróleo, em 1973 e 1979, o desabastecimento, a inflação, os elevados endividamentos, os déficits e as variações de câmbio e juros modificaram as projeções dos investidores naquela década (YERGIN, 1992). A reflexão desses fatores se deu no comportamento do mercado financeiro, tanto em relação à dinâmica de contratos, quanto na evolução das ferramentas de proteção contra o risco, até os dias atuais.

Num segundo espectro do movimento, paralelamente, a revolução científica-tecnológica, particularmente nas áreas de microinformática e telecomunicações, alterou profundamente as transações entre os diversos mercados financeiros. Estabeleceu-se um mercado único, com volumes gigantescos transacionados diariamente, entre as bolsas de negócio do mundo, através de movimentações quase instantâneas. Ao levarmos em consideração o momento atual de digitalização de todos os processos, a alteração é ainda maior. Se por um lado esse estabelecimento criou diversas oportunidades de investimento e facilitou o acesso do público comum ao mercado de capitais, por outro, trouxe incerteza e insegurança causada pela natureza volátil desses ambientes.

Assim, nesse panorama, o risco passou a ser considerado como um elemento inevitável, incorporado a qualquer investimento e, conseqüentemente, o gerenciamento de risco tornou-se vital para os agentes econômicos (CUNHA, 2005). Isso estimulou a elaboração e o aperfeiçoamento de novos e complexos instrumentos financeiros que permitissem uma melhor administração dos investimentos. Como exemplo, há os chamados derivativos financeiros, dos quais derivam as opções financeiras e de onde, por sua vez, originou-se o objeto de estudo desta pesquisa: opções reais. Então, para melhor compreensão, será necessária uma breve introdução dos principais fundamentos de opções financeiras e outros derivativos financeiros, como visto a seguir.

Os instrumentos citados partem de conhecimento matemático bastante elaborado, indo além da matemática financeira empregada nos problemas clássicos de finanças,

como a análise de investimentos a partir do FCD. Até a metade do século XX, a Teoria de Finanças, como descreve Schumacher (2002) em sua tese de mestrado, tinha a base matemática de problemas de atuária e contabilidade, ou seja, pensões e anuidades, cálculo de juros, com enfoque em administração e incremento de fundos.

Porém, a partir da segunda metade do século, iniciou-se o desenvolvimento de novas técnicas, divididas em duas vertentes: uma envolvendo modelos econômicos envolvendo condições de incertezas e a outra das que não envolviam técnicas probabilísticas (CUNHA, 2005). Como exemplo, em seu trabalho clássico de 1952, acerca de problemas de decisão sob incerteza para indivíduos relacionado à composição de carteiras, Harry Markowitz utiliza noções de estatística como variância e covariância, para estimar o risco em contrapartida ao retorno das ações, estudando o papel da diversificação de portfólios no célebre modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*). Como desenvolvimento das ideias de Markowitz, em 1964, William Sharpe buscou explicar o comportamento de investidores no mercado em equilíbrio. Somente houve formalização da noção de equilíbrio com Stephen Ross, em 1976, através do conceito de arbitragem no modelo teórico de APT (*Arbitrage Pricing Theory*). Essa teoria diz que uma das premissas de equilíbrio de mercado é a ausência de arbitragem, ou seja, não pode existir oportunidade de obtenção de ganhos sem incorrer em riscos.

Em todos esses trabalhos, foram empregados conceitos probabilísticos como ferramenta de análise, controle e estimativa de riscos. Entretanto, no ano de 1973, foram publicados dois artigos sobre a análise teórica de contratos de opções. Nesses trabalhos, Fisher Black e Myron Scholes buscaram estabelecer o chamado preço justo (ou preço racional) de opções europeias, obtendo a reconhecida fórmula que leva o nome da dupla e desenvolvendo o conceito de estratégia de cobertura contra riscos (*hedging*). Do ponto de vista matemático, esses artigos mostraram definitivamente o importante papel dos processos estocásticos em instrumentos do mercado financeiro (CUNHA, 2005).

2.1 Derivativos

Um derivativo pode ser definido como um contrato cujo valor depende de outras variáveis mais básicas (HULL, 1996), conhecidos como ativos subjacentes. Basicamente, trata-se de: contratos futuros, contratos a termo, *swaps* e contrato de opções. Por exemplo,

uma opção de compra de ações da Petrobras é um derivativo, que depende valor da ação dessa empresa (ativo subjacente). Um contrato futuro de trigo também é um derivativo, pois seu valor varia de acordo com o preço da *commodity*.

Como o mercado de futuros se entende pelos contratos futuros, que são compromissos de comprar ou vender numa data futura específica, por um preço previamente estabelecido. Os contratos são padronizados e as negociações de compra e venda são efetuadas contra as bolsas. No Brasil, a Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), de São Paulo, é a responsável pela compensação e liquidação física e financeira deste tipo de transação. Além disso, ela deve especificar, em detalhes a natureza exata do acordo entre as duas partes: o ativo, o tamanho do contrato (quanto do ativo) e onde e quando a entrega será realizada. Quando se trata de uma *commodity*, pode haver diversos tipos da mesma, disponíveis no mercado. Assim, ao especificá-lo, é importante que a bolsa estipule o tipo ou os tipos aceitáveis da mercadoria – por exemplo, é aceitável certo tipo de petróleo com determinados grau de API - *American Petroleum Institute*, grau de padronização de certo tipo de óleo - e percentual de enxofre por peso.

Quanto a mercados a termo, os contratos são semelhantes aos futuros, porém eles não são negociados em bolsa e nem são padronizados como os contratos futuros já que são acordos particulares entre duas instituições financeiras ou uma instituição e um cliente (CUNHA, 2005). Uma das partes assume a posição comprada, concordando em comprar o ativo numa data específica por certo preço, e, em contrapartida, a outra parte assume a posição vendida e concorda em vender o ativo naquela data e por aquele preço. O Quadro 2 apresenta as principais diferenças entre os dois tipos de contrato.

Quadro 2 - Comparação entre contratos a termo e futuros

Contrato a Termo	Contrato Futuro
Contrato particular entre duas partes	Negociado em bolsa
Não padronizado	Padronizado
Uma data específica de entrega acordada	Várias datas de entrega possíveis
Ajustado no vencimento	Ajustado diariamente
Entrega ou liquidação financeira final	Encerrado geralmente antes do encerramento

Fonte: Hull (1996), pág. 43.

Outro tipo de derivativo são os *swaps*, que são acordo privados entre duas partes para troca futura de fluxos de caixa, respeitada uma fórmula pré-estabelecida no contrato. Estes contratos visam a troca de rentabilidade e/ou de indexadores entre as partes. Analogamente ao mercado a termo, as partes acordam entre si o prazo, o valor e a forma de correção. Por isso, pode-se dizer que a análise de *swaps* é uma extensão natural do estudo dos contratos futuros e a termo.

Por fim, as opções têm fundamentos diferentes dos outros contratos apresentados. Uma opção dá ao seu titular o direito de fazer algo, sem obrigação de exercer tal direito, diferentemente de contratos futuros e a termo, em que há o compromisso de fazer algo, de ambas as partes. Esses contratos não têm custo para serem realizados, com exceção dos depósitos de margem, ao passo que a compra de opção requer pagamento adiantado. Uma semelhança está no fato das operações de compra e venda serem realizadas também contra as bolsas.

Os contratos de opção dão ao seu titular (comprador da opção) o direito, mas não a obrigação, de exercê-los. Na opção de compra do tipo europeia, por exemplo, o detentor (titular da opção) tem o direito de comprar o ativo em certa data por determinado preço, chamado preço de exercício.

Dado que as opções financeiras são a origem do pensamento de opções reais, objeto central desse trabalho, é bastante relevante uma análise mais profunda sobre o assunto. Os tipos de opções, as posições a serem escolhidas e as metodologias de precificações de opções serão vistas a seguir, para então, no capítulo seguinte, ser abordada a Teoria das Opções Reais.

2.2 Tipos de Opções Financeiras

Existem algumas classificações de opções. Uma básica é a divisão entre opção de compra e opção de venda. Dentro de cada categoria, a opção pode ser do tipo americana ou europeia, o que faz surgir um possível *mix* com quatro tipos diferentes de ofertas para o investidor: a opção de compra americana, a opção de compra europeia, a opção de venda americana e a opção de venda europeia. A diferença entre uma opção americana e europeia reside na data de exercício de cada uma. As opções americanas podem ser exercidas a qualquer momento, até a data de vencimento e as opções europeias só podem

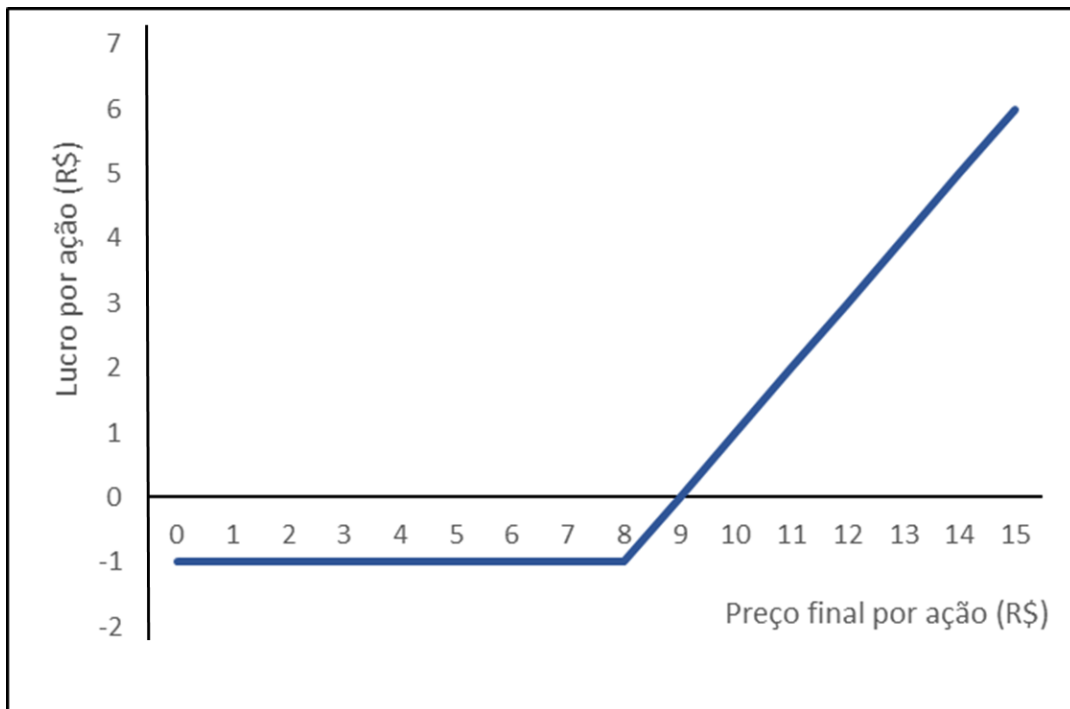
ser exercidas na data exata do vencimento. A maior parte das opções negociadas em bolsa é do estilo americana, entretanto, as opções europeias são em geral mais fáceis de serem analisadas. Por isso, daqui para frente, exceto quando explicitado o contrário, estará sendo mencionada uma opção europeia, para facilidade de entendimento.

Já a natureza da opção em relação a ser de compra ou de venda está ligada ao direito que o titular irá possuir. Sendo assim, a opção de compra (*call*) proporciona ao seu titular (comprador da ação) o direito de comprar um ativo (subjacente), em determinada data, por certo preço. Analogamente, uma opção de venda (*put*) dá ao titular o direito de vender um ativo em certa data, por determinado preço. A data determinada no contrato é conhecida como data de vencimento ou de exercício. Já o preço especificado é chamado preço de exercício (*strike price*).

Buscando exemplificar o funcionamento de uma opção de compra, será descrito um caso hipotético, onde o investidor adquire uma opção europeia de compra de um lote de 1000 ações da Petrobras, com preço de exercício de R\$8,00. O preço atual da ação é de R\$6,50, a data de vencimento da opção será daqui a dois meses e o prêmio (quantia devida pelo investidor ao lançador da opção) pago pela opção de compra de cada ação é de R\$1,00. O investimento inicial é, portanto, de R\$1.000,00 (1000 x R\$1,00). Como a opção é europeia, ela só pode ser exercida na data de vencimento. Se o preço da ação naquela data for menor do que R\$8,00, obviamente, o investidor preferirá não a exercer. Nesse caso, ele perderá todo o investimento inicial de R\$1.000,00, que “virará pó”. Se o preço da ação for superior a R\$8,00 na data de vencimento, a opção será exercida. Se ela subir, por exemplo, para R\$10,00, ao exercer essa opção, o investidor poderá adquirir 1000 ações por R\$8,00 cada e vender imediatamente, obtendo um lucro de R\$2,00 por ação, ou R\$2.000,00 no total. Descontando o custo inicial de R\$1.000,00, o lucro líquido do investidor totalizará R\$1.000,00.

É importante perceber que há casos onde o investidor exerce a opção, mas realiza prejuízos no todo. Na situação onde o preço da ação da Petrobras fosse R\$8,70 no dia do vencimento, o investidor exerceria a opção, obtendo um ganho de R\$700,00 [1000 x (R\$8,70 – R\$8,00)] e uma perda total de R\$300,00, em função do investimento de R\$1.000,00, na compra da opção. A Figura 2 mostra a evolução dos lucros por ação.

Figura 2 - O lucro por ação da compra de uma call de acordo com o preço final da ação



Fonte: Elaboração própria.

Teoricamente, o investidor não deveria exercer a opção sob tais circunstâncias. Contudo, se não o fizesse, sua perda total seria de R\$1.000,00, prejuízo pior que os R\$300,00, resultantes do exercício. De modo geral, as opções de compra são sempre exercidas na data de vencimento quando o preço da ação estiver acima do *strike*.

2.3 Posições em opções

É importante ressaltar que em cada contrato de opções há duas pontas. Numa delas, está o investidor que assume uma posição comprada, ou seja, compra a opção. Na outra ponta, está o investidor que assume a posição vendida, isto é, vende (ou lança) a opção. O lançador recebe uma opção e recebe o dinheiro adiantado, mas tem obrigações potenciais mais tarde, no caso de o comprador resolver exercer sua opção, seja ela de venda ou de compra. Seu lucro (ou prejuízo) é oposto ao do comprador.

Há quatro tipos de posições em opções: comprada numa opção de compra, comprada numa opção de venda, vendida numa opção de compra e vendida numa opção de venda. Se k é o *strike* e S_t é o preço final do objeto de negociação, os retornos das posições comprada e vendida, numa *call* e numa *put* europeias. No caso de uma posição

comprada numa opção de compra europeia, o retorno nunca será negativo pois a opção só será exercida se o preço do ativo no vencimento for maior que o *strike* ($S_t > k$). Caso o preço esteja igual ou abaixo do *strike* ($S_t \leq k$) na data de vencimento, isto é, $S_t - k < 0$, a opção não será exercida, ou seja, o retorno será zero (o maior valor entre $S_t - k$ e zero). O mesmo raciocínio pode ser aplicado para a demonstração dos outros três resultados apresentados no quadro a seguir.

Quadro 3 - Retornos de posições para opções europeias

	Opção de compra (call)	Opção de compra (put)
Posição comprada	$\text{máx}(S_t - k; 0)$	$\text{máx}(k - S_t; 0)$
Posição vendida	$\text{min}(k - S_t; 0)$	$\text{min}(S_t - k; 0)$

Fonte: Adaptação de Cunha (2005), pág. 24.

São utilizadas algumas expressões para indicar a relação entre o valor do ativo financeiro (S_t) e o preço de exercício da opção (k) na data de vencimento. A opção de compra pode estar: *deep in the money*, quando o preço do ativo é maior que o de exercício ($S_t > k$); *in the money*, quando o preço do ativo é igual ao de exercício; ou *out of the money*, quando o preço do ativo é inferior ao *strike* ($S_t < k$). Assim, uma opção favorece àquele que está comprado em uma opção de compra, pois significa que esse obterá lucro com o exercício da opção, e à parte vendida em uma opção de venda, pois significa que a opção não será exercida e a posição vendida lucrará o prêmio da opção. Analogamente, uma opção *out of money* favorece a posição vendida em uma opção de compra e a posição comprada em uma opção de venda (HULL, 1996).

2.4 Fatores que afetam o preço das opções

Também chamado de prêmio, o preço da opção de ação é definido a partir de uma série de variáveis. Essas variáveis, por sua vez, são afetadas tanto pelo ativo subjacente quanto pelo mercado financeiro e situação econômica. São elas: o preço de exercício (*strike*), o preço atual da ação, o tempo para o vencimento, a volatilidade do preço da ação, a taxa de juros livre de risco e os dividendos esperados durante a vida da opção. Será feita uma análise acerca de cada fator e do comportamento do prêmio a partir de

alterações nessas variáveis. Vale ressaltar, nessa análise, enquanto um fator se altera, os outros são mantidos constantes.

Iniciando com os fatores preço da ação e *strike*, esses influenciam de maneiras diferentes uma opção de compra e uma opção de venda. Para a de compra, quanto maior for o preço atual da ação e menor for o *strike*, maior será o preço da opção. Já para opção de venda, ela terá mais valor quanto menor for o preço atual pago pela ação e quanto maior for o *strike*.

Quando se trata de prazo de vencimento de uma opção, ele afeta o preço da opção de forma diferente quando falamos em estilo europeu ou americano. Conforme já descrito neste estudo, elas se diferenciam justamente pelo prazo de vencimento. Assim, numa opção americana, tanto as de compra como as de venda, tornam-se mais valiosas conforme aumenta o prazo de vencimento. Mais tempo para exercer a opção faz com que o titular da opção de longo prazo tenha mais oportunidades de decisão que o de curto prazo e isso confere mais valor à opção. O mesmo não pode ser dito das opções europeias, pois, por terem que ser exercidas em uma data fixa, têm pouco flexibilidade. Elas não se tornam necessariamente mais valiosas à medida que aumenta o tempo para exercício. Supondo um dividendo muito grande esperado em 8 semanas e que ele cause uma queda no preço da ação. É provável que isso faça com que a opção de curta duração tenha mais valor que a de longa duração.

Ao tratar-se de volatilidade de um preço da ação, é importante entender que se trata de uma medida de incerteza quanto às oscilações futuras em seu preço. Quanto maior a volatilidade, maior a possibilidade de desempenho tanto muito bom quanto muito ruim. Para o detentor de uma ação, os dois cenários tendem a se compensar. Já para o titular de uma opção, isso não é válido. Para o titular de uma opção de compra, há benefícios com elevações de preço, mas terá risco limitado se o preço cair, já que o máximo que pode perder é o valor pago pelas opções. Já para o detentor de uma opção de venda, há benefício com quedas do preço da ação, mas terá risco limitado se ele subir. Então, os valores de opções de compra e venda crescem à medida que aumenta a volatilidade.

Os dividendos têm o efeito de reduzir o preço da ação logo após sua efetivação, o que é ruim para o valor das opções de compra e bom para o valor das opções de venda.

Logo, o valor da *call* se relaciona negativamente com o tamanho de qualquer dividendo pago antes da data de exercício e o valor da *put* de forma positiva.

Quadro 4 - Efeito do aumento de diversos fatores sobre o valor da opção

Aumento do fator	Efeito sobre o valor da	
	Opção de compra	Opção de venda
Preço da ação	▲	▼
Preço do exercício	▼	▲
Prazo do exercício	▲	▲
Volatilidade do preço da ação	▲	▲
Dividendos pagos	▼	▲
Taxa livre de juros	▲	▼

Fonte: Adaptação de Schumacher (2002), pág. 46.

Por fim, a taxa livre de juros afeta o preço de uma opção de forma indireta e menos evidente. A taxa de crescimento esperado para o preço da ação tende a aumentar dada a expansão dos juros. Entretanto, diminui o valor atual dos fluxos de caixa a serem recebidos pelo titular da opção no futuro. Esses dois fatores tendem a diminuir o valor da opção de venda. No caso das opções de compra, o primeiro efeito tende a aumentar seu preço e o segundo, a diminuí-lo. Como o primeiro efeito prevalece sobre o segundo, o preço das opções de compra aumenta. Em resumo, um aumento da taxa de juros livre de risco provocará um aumento no preço da *call* e diminuição do preço da *put*. Vale ressaltar que essas teorias não englobam mudanças nas outras variáveis. Na prática, quando as taxas de juros crescem, os preços das ações tendem a cair, o que eleva o preço das opções de venda e diminui o das opções de compra.

O Quadro 4 resume o que foi dito sobre os fatores que afetam o preço das opções. Vale lembrar que, pelos motivos já mencionados, no caso das opções europeias, o aumento do prazo de vencimento pode não causar um comportamento no preço das opções como apresentado no quadro.

2.5 Prêmio de uma opção: modelos de avaliação

O item anterior nos deu a base para determinarmos qual o preço a ser pago por esta opção, pois apresentou as principais variáveis que afetam direta ou indiretamente sob este e como afetam. Ele também é chamado de prêmio e a teoria de avaliação ou precificação de opções procura determinar o valor justo (ou racional) de uma opção.

Então, nos próximos itens desse estudo, serão descritos os principais modelos de avaliação de opções: o Modelo Binomial e o Modelo de Black & Scholes. Estes avaliam opções através da criação e replicação de carteiras compostas pelo ativo subjacente e pela captação ou aplicação de recursos livres de risco. Portanto, eles podem ser utilizados para avaliar ativos financeiros (ou reais, como é apresentado no Capítulo 3) com características de opções.

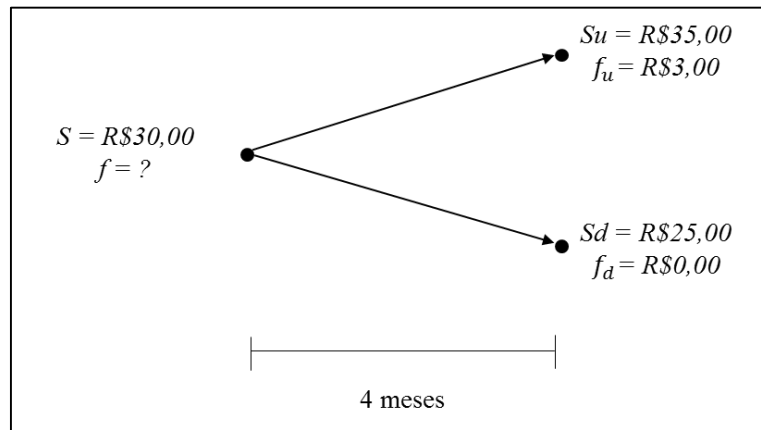
2.5.1 Modelo Binomial

A árvore binomial é uma técnica muito útil e popular para a precificação de uma opção sobre uma ação. Nessa árvore, são representadas as diferentes trajetórias que poderão ser seguidas pelo preço da ação durante toda a vida da opção. Nesse subitem, será feita uma análise de árvores binomiais, bem como sua relação com o princípio de risco-neutro, utilizado pela primeira vez no importante estudo de Cox, Ross e Rubinstein (1979).

A. Modelo Binomial de Passo Único

De início, será considerado um exemplo simples. Um modelo binomial de passo único adaptado de Hull (1996). Admite-se que o preço atual da ação seja R\$30,00 e que, ao final de quatro meses, ela possa atingir tanto R\$35,00 quanto R\$25,00. A questão de interesse é avaliar uma opção europeia de compra da ação por R\$32,00, em quatro meses. Essa opção terá um dos dois valores no final do período considerado. Se o preço da ação na data de exercício for R\$35,00, o valor da opção será de R\$3,00, pois o titular exerceria a opção de compra, pagando R\$32,00 na ação e vendendo-a no mercado à vista (*spot*) por R\$35,00. Caso contrário, se o preço da ação for a R\$25,00, seu valor será zero, dado que o titular não exerceria a opção de compra. A situação está ilustrada na Figura 3, considerando o preço da ação hoje (S) e no futuro (S_u se o preço subir, S_d se cair), o preço da opção hoje (f) e no futuro (f_u se a ação subir, f_d se cair) e o tempo de duração.

Figura 3 - Oscilações no preço da ação com exemplo numérico



Fonte: Elaboração própria.

Essa teoria relativamente simples pode ser usada para precificar a opção, ou seja, calcular justamente o valor desconhecido (f) do qual precisamos. Entretanto, para prosseguir o exemplo, é necessário adotar a hipótese da não-arbitragem para o investidor nesse mercado. Será criada uma carteira com a ação e sua respectiva opção de modo que não haja incerteza com relação a seu valor ao final de quatro meses. Como a carteira não possui risco, pode-se argumentar que seu retorno é igual à taxa de juro livre de risco. Isto faz com seja possível calcular o custo de elaboração da carteira e, portanto, o prêmio justo a ser pago pela opção. Visto que há dois títulos (ação e opção) e apenas dois resultados possíveis, será sempre viável criar uma carteira sem risco.

Considerando um portfólio composto de uma posição de Δ ações e de uma posição vendida numa *call*, pode-se calcular o valor de Δ que torne tal portfólio sem risco. Havendo uma elevação do preço da ação de 30 para 35, o valor das ações será 35Δ e o custo da opção será 3, pois, uma vez na posição vendida, o lançador será obrigado a vender a ação por 32, perdendo 3. Assim, o valor total da carteira nessa primeira situação será $35\Delta - 3$. Agora, se houver uma redução no preço da ação de 30 para 25, o valor das ações será de 25Δ e o valor da opção será zero, pois o titular não exercerá seu direito de compra por 32. Então, o valor total da carteira na segunda situação será 25Δ . O portfólio não terá risco somente quando o seu valor final for igual em qualquer das situações, ou seja:

$$35\Delta - 3 = 25\Delta$$

$$\Delta = 0,3$$

Portanto, uma carteira sem risco estará comprada em 0,3 ação e vendida em 1 (uma) *call*. Se o preço da ação subir para 35 ou cair a 25, o valor da carteira será o mesmo, igual a:

$$35 \times 0,3 - 3 = 7,5$$

$$25 \times 0,3 = 7,5$$

Não havendo oportunidade de arbitragem, carteiras sem risco devem render a taxa de juro livre de risco. Se considerarmos nesse caso, uma taxa contínua de 15% ao ano, o valor da carteira trazida para o valor presente (descontando o período de quatro meses) deverá ser:

$$7,5 \cdot e^{-0,15 \times \frac{4}{12}} = 7,134$$

Sabendo que o preço atual da ação é R\$30,00, o valor da carteira será o valor das ações (30Δ) descontado o custo da opção (f), ou seja, $30\Delta - f$. Sabendo quanto vale Δ e igualando esta expressão com o resultado obtido acima, é possível calcular f :

$$30\Delta - f = 7,134$$

$$30 \times 0,3 - f = 7,134$$

$$f = 1,866$$

Isso mostra que, na ausência de oportunidade de arbitragem, o prêmio justo a ser pago pela opção na data de hoje deve ser R\$1,866.

Afim de generalizar a teoria apresentada, considera-se uma ação cujo preço atual seja S e uma opção de uma ação cujo preço atual seja f . Imaginando que a opção dure um tempo T e, que ao longo de sua vida, o preço da ação possa ficar tanto acima de S , para um novo nível Su , quanto abaixo de S , para um novo nível Sd (logicamente com $u > 1$ e $d < 1$). Com o preço subindo para Su , será suposto que o retorno da opção seja f_u e, se cair para Sd , seja f_d .

Conforme apresentado no exemplo, essa carteira será composta de uma posição comprada em Δ ações e de uma posição vendida numa *call*. É buscado o cálculo do valor

de Δ , para que torne a carteira sem risco. Para isso, serão utilizados os valores finais da carteira nas hipóteses de alta e de baixa no preço da ação que, respectivamente, são:

$$Su\Delta - f_u \quad \text{e} \quad Sd\Delta - f_d$$

Ao igualar as duas expressões, se encontra o valor de Δ :

$$Su\Delta - f_u = Sd\Delta - f_d$$

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{Su - Sd}$$

Equação 1 - Variação no preço da opção frente à variação no preço da ação

A Equação 1 mostra que Δ é a razão da mudança no preço da opção em relação à mudança no preço da ação conforme nos movemos entre os nós da árvore binomial.

Definindo a taxa de juro livre de risco por r , o valor da carteira no tempo T descontado para o presente deverá ser:

$$S\Delta - f = (Su\Delta - f_u)e^{-rT}$$

Substituindo o Δ e simplificando, essa equação se reduz a:

$$f = e^{-rT} \left[\left(\frac{e^{rT} - d}{u - d} \right) f_u + \left(1 - \frac{e^{rT} - d}{u - d} \right) f_d \right]$$

Considerando $p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$, encontra-se a expressão em sua forma reduzida:

$$f = e^{-rT} [pf_u + (1 - p)f_d]$$

Equação 2 - Preço da opção no modelo binomial de passo único

Nesse momento, para testar a veracidade da Equação 2 utilizaremos o exemplo numérico anterior, onde $r = 15\%$ ao ano; $T = 4$ meses; $u = 1,167$ (aumento de 16,7% no

preço da ação, de R\$30,00 para R\$35,00); $d = 0,833$ (queda de 16,7% no preço da ação, de R\$30,00 para R\$25,00); $f_u = 3$; e $f_d = 0$. Dessa forma, obtém-se:

$$p = \frac{e^{0,15 \times \frac{4}{12}} - 0,833}{1,167 - 0,833} = 0,6535$$

$$f = e^{-rT} [pf_u + (1 - p)f_d] = e^{-0,15 \times \frac{4}{12}} [0,6535 \times 3 + (1 - 0,6535) \times 0] = 1,866$$

Esse resultado confere com a resposta obtida anteriormente.

A forma mais lógica de interpretar a variável p é como sendo a probabilidade de um aumento no preço da ação e, por analogia, $(1 - p)$ como a probabilidade de uma queda. Assim, a expressão $pf_u + (1 - p)f_d$ é interpretada como o valor esperado de ganho da opção. A partir desta interpretação de p , a Equação 2 demonstra, então, que o valor atual da opção é seu valor futuro esperado, descontado à taxa livre de risco.

Assumindo que a probabilidade de um aumento no preço da ação seja p e lembrando que S é o preço atual da ação, o valor esperado do preço da ação no tempo T é dado por:

$$E(S_T) = pSu + (1 - p)Sd$$

Substituindo $p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$, obtém-se a seguinte redução:

$$E(S_T) = Se^{rT}$$

Equação 3 - Valor esperado do preço da ação no tempo T

Esta equação apresentada acima mostra que o preço da ação aumenta, em média, a uma taxa livre de risco (considerando capitalização contínua). Logo, o fato de considerar p como a probabilidade de um aumento no preço da ação equivale a supor que o retorno sobre a ação é igual à taxa livre de risco. Este resultado é um exemplo do princípio da indiferença ao risco ou do risco-neutro, ou seja, uma situação de indiferença ao risco onde

os investidores não têm exigências de compensação pelos riscos e o retorno esperado de todos os títulos é a taxa de juro livre de risco (COX, ROSS e RUBINSTEIN, 1979). Portanto, o princípio do risco-neutro pode ser definido como: qualquer título dependente de outros títulos negociados pode ser avaliado segundo a suposição de que os investidores sejam indiferentes ao risco (HULL, 1996).

Vale ressaltar que este princípio não afirma que os investidores sejam indiferentes ao risco, mas que títulos derivativos (opções, contratos futuros, *swaps*) podem ser avaliados com base na suposição de que os investidores sejam indiferentes ao risco. Isto significa que as preferências de risco dos investidores não influenciam o valor de uma opção quando expresso como função do preço da ação.

Este princípio se faz de extrema importância, uma vez que, numa situação de indiferença ao risco, podemos comprovar dois resultados particularmente simples:

1. O retorno esperado de todos os títulos é a taxa de juro livre de risco;
2. A taxa de juro livre de risco é a taxa de desconto apropriada para qualquer fluxo de caixa esperado no futuro.

B. Modelo Binomial de Passo Duplo

Observando agora a árvore binomial de passo duplo, é possível aplica-la no mesmo modelo acima, como indicado na Figura 4, em que o preço da ação, que começa em R\$30,00, pode aumentar ou diminuir 16,7% em cada um dos dois períodos de tempo. Também será considerado que cada passo de tempo seja de quatro meses, a taxa de juro livre de risco seja de 15% ao ano e uma opção cujo *strike* é R\$32,00.

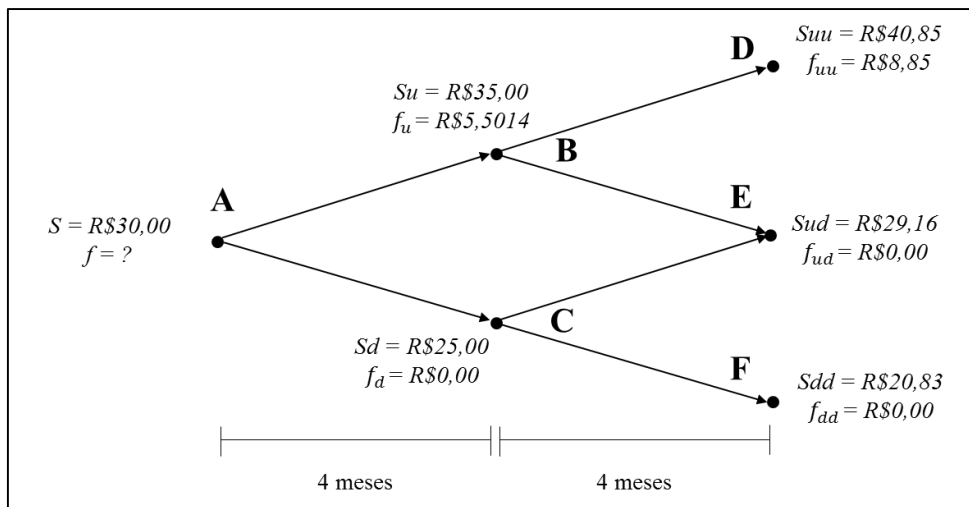
O objetivo desta análise é calcular o preço da opção no nó inicial da árvore (*f*), o que pode ser feito através da repetição do que foi aplicado anteriormente. Os preços da opção nos nós finais são facilmente calculados, visto que são os retornos da opção. No nó D, o preço da ação é R\$40,85 e o preço da opção é R\$8,85 (ou seja, R\$40,85 – R\$32,00). Nos nós E e F, a opção está *out of money* e, portanto, seu valor é zero. O preço da opção no nó C também é zero, já que ele conduz aos nós E e F, ambos com preço de opção zero. Separando somente o ramo DBE, calculamos o preço da opção no nó B conforme a Equação 2, onde $r = 15\%$ ao ano; $T = 4$ meses; $u = 1,167$ (aumento de 16,7% no preço da

ação, de R\$35,00 para \$40,85); $d = 0,833$ (queda de 16,7% no preço da ação); $f_{uu} = 8,85$; e $f_{ud} = 0$.

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} = \frac{e^{0,15 \times \frac{4}{12}} - 0,833}{1,167 - 0,833} = 0,6535$$

$$f_u = e^{-rT} [pf_{uu} + (1 - p)f_{ud}] = e^{-0,15 \times \frac{4}{12}} [0,6535 \times 8,85 + (0,3465 \times 0)] = 5,5014$$

Figura 4 - Preços da ação e da opção numa árvore binomial dupla



Fonte: Elaboração Própria.

Uma vez calculados os valores nos nós B e C, aplica-se novamente a Equação 2 no primeiro passo da árvore, para encontrar o preço da opção no primeiro nó. Sabendo que o valor da opção no nó B é R\$5,5014 e no nó C é zero, f será:

$$f = e^{-0,15 \times \frac{4}{12}} [0,6535 \times 5,5014 + (0,3465 \times 0)] = 3,4198$$

Portanto, o prêmio justo a ser pago pela opção é R\$3,4198.

Para que a probabilidade de indiferença ao risco (p) fosse a mesma em cada período, além da taxa livre de risco constante, o exemplo foi elaborado para que as oscilações ascendentes e descendentes fossem proporcionais (u e d iguais) em cada nó e que os intervalos de tempo tivessem a mesma duração.

Pode-se generalizar o caso de dois intervalos de tempo, encontrando as seguintes equações do preço da opção da opção nos nós A, B e C, respectivamente:

$$f = e^{-rT} [pf_u + (1 - p)f_d]$$

$$f_u = e^{-r\Delta T} [pf_{uu} + (1 - p)f_{ud}]$$

$$f_d = e^{-r\Delta T} [pf_{ud} + (1 - p)f_{dd}]$$

Substituindo as duas últimas equações na primeira, obtém-se:

$$f = e^{-2r\Delta T} [p^2 f_{uu} + 2p(1 - p)f_{ud} + (1 - p)^2 f_{dd}]$$

Equação 4 - Preço da opção no modelo binomial de passo duplo

Este resultado é consistente com o princípio do risco-neutro mencionado anteriormente. As variáveis p^2 , $2p(1 - p)$ e $(1 - p)^2$ são as probabilidades alta, média e baixa que os preços da ação podem atingir nos nós finais. Assim, conforme o princípio do risco-neutro, o preço da opção é igual ao seu retorno esperado descontado para o presente à taxa de juro livre de risco.

C. Modelo Binomial de Múltiplos Passos

O mesmo princípio continuará valendo para qualquer número de passos que forem considerados na árvore binomial, sendo o preço da opção sempre igual a seu retorno esperado numa situação de indiferença ao risco, descontado à taxa livre de risco.

Schumacher (2002) observa em sua tese que, para uma grande quantidade destes intervalos discretos, Cox, Ross & Rubinstein (1979) demonstraram, com uma matemática complexa, que as equações do modelo binomial tendem no limite para a equação Black & Scholes, que foi deduzida originalmente para tempo contínuo. Tal modelo será descrito no item a seguir.

O modelo binomial é baseado numa simplificação da representação da evolução dos valores da ação (ou qualquer outro ativo subjacente) ao longo do tempo. Em cada

período de tempo, o preço da ação pode tomar somente um dos dois valores possíveis. Por exemplo, uma ação que tem preço inicialmente S , dentro de um período de tempo pode se mover tanto para cima (Su) quanto para baixo (Sd). No próximo intervalo de tempo, os valores possíveis são: Suu , Sud ou Sdd . E assim por diante, resultando, ao final dos períodos considerados, numa distribuição discreta de possíveis valores.

Há grande flexibilidade nessa discretização da distribuição dos valores, dependendo do intervalo de tempo considerado para mudanças do preço da opção. Num mesmo intervalo de tempo pode-se refinar essa distribuição. Num intervalo de dois anos, por exemplo, quando se considera somente dois passos de tempo, ou seja, dois períodos de um ano, somente três resultados são possíveis ao final do intervalo de tempo escolhido. Se forem consideradas informações trimestrais, ou seja, quatro mudanças de valores por ano, obtêm-se nove possíveis resultados ao final dos mesmos dois anos. Pode-se, portanto, cada vez mais, chegar a resultados mais refinados. Para isso, basta aumentar o número de informações, uma vez que se diminui o intervalo de cada período.

2.5.2 Modelo Black & Scholes

O modelo de Black & Scholes foi proposto, no início dos anos 70, por Fisher Black e Myron Scholes. Ele é um caso limite do binomial, porém reduz de forma substancial a necessidade de dados de entrada para aplicação de fórmulas em problemas mais complexos. O conceito de não-arbitragem também se faz presente neste modelo, criando-se um portfólio sem risco, composto por uma posição num ativo subjacente e uma posição numa opção. Na ausência de oportunidade de arbitragem, o retorno dessa carteira deve ser calculado através da taxa livre de risco.

De forma sintetizada, Black & Scholes formularam uma equação para precificar opções sobre ações e partiram de algumas hipóteses:

1. O comportamento do preço da ação corresponde ao modelo lognormal (preços normalmente e positivamente distribuídos), com média (μ) e desvio-padrão (σ) constantes;
2. Não há custos operacionais e nem impostos, além de que todos os títulos são perfeitamente divisíveis;

3. A ação não receberá dividendos durante a vida da opção;
4. Não há oportunidade de arbitragem;
5. A negociação com títulos é contínua;
6. Os investidores podem captar ou emprestar recursos à mesma taxa de juro livre de risco;
7. A taxa de juro livre de risco (r) é constante no curto prazo.

Algumas dessas premissas foram flexibilizadas por outros pesquisadores. Por exemplo, a fórmula pode ser ajustada para considerar o pagamento de dividendos ou pode-se considerar r e σ variáveis com o tempo, e não mais constantes. Cabe ressaltar que as extensões do trabalho de Black e Scholes são particularmente importantes para ativos reais, onde se deve considerar a relevância do pagamento de dividendos, ou quando a volatilidade desses ativos siga outro processo estocástico, que não o lognormal.

Assim como o modelo binomial, o modelo Black & Scholes também se fundamenta na criação de um portfólio sem risco. Isso se deve ao fato de que, tanto o preço da ação quanto o preço da opção, são afetados pela mesma origem de incerteza: as oscilações de preço da ação. Por esse motivo, podemos montar uma carteira sem risco constituída de uma posição na opção e outra posição na ação objeto. Quando elaboramos uma carteira apropriada com a ação e a opção, o lucro (ou prejuízo) da posição na ação sempre compensa o prejuízo (ou lucro) da posição na opção, de modo que o valor global da carteira, no final de um curto período de tempo, seja conhecido com certeza.

As fórmulas de Black & Scholes para os preços de opções de compra (c) e opções de venda (p) europeias de ações sem dividendos são:

$$c = SN(d_1) - ke^{-rT}N(d_2)$$

Equação 5 - Equação de Black & Scholes: preço de uma *call*

$$p = -ke^{-rT}N(d_2) - SN(-d_1)$$

Equação 6 - Equação de Black & Scholes: preço de uma *put*

Onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

As variáveis c e p são os preços das opções de compra (*call*) e venda (*put*) europeias, respectivamente, S é o preço da ação, k é o preço de exercício, r é a taxa de juro livre de risco, T é o tempo até o vencimento da ação e σ é a volatilidade (desvio-padrão) do preço do ativo. Como o modelo considera uma ação sem dividendos, o preço da opção de compra americana iguala-se ao preço de uma opção de compra europeia, podendo ser achado também pela Equação 5. O mesmo não pode ser dito quanto a uma opção de venda americana de uma ação sem dividendos, pois sua maneira de precificação é muito mais complexa.

Das variáveis apresentadas somente as funções $N(d_1)$ e $N(d_2)$ não haviam sido citadas anteriormente neste texto. A função $N(x)$ é a função de probabilidade acumulada de uma variável normal padronizada. Em outras palavras, é a probabilidade de que uma variável com distribuição normal padrão, $\Phi(0,1)$, seja menor que x . A melhor maneira de obter esse valor é utilizar uma tabela, como a do anexo I.

As demonstrações das fórmulas elaboradas por Black e Scholes está além do escopo deste trabalho. Algumas interpretações podem ser tiradas a partir delas. Para isso, serão feitas análises do que ocorre quando alguns parâmetros assumem valores extremos.

Quando o preço da ação (S) se torna muito grande, d_1 e d_2 também se tornam muito grandes e $N(d_1)$ e $N(d_2)$ ficam próximos de 1, seu valor máximo. Conseqüentemente, o preço da opção de compra (c) será $S - ke^{-rT}$. Isso comprova a afirmação de que, quando o preço de uma ação se torna muito grande, é quase certo de que a opção será exercida.

Por outro lado, o preço de uma opção de venda europeia (p) aproxima-se de zero quando o preço da ação aumenta muito, pois $N(-d_1)$ e $N(-d_2)$ também tendem a zero. Isso comprova o fato de que uma opção de venda não será exercida quando o preço da ação é muito alto.

Conforme dito anteriormente, o modelo Black & Scholes desconsidera o pagamento de dividendos ao longo do tempo de vida de uma opção. Porém, a teoria das opções reais trata de ativos reais onde, na maioria dos casos, os dividendos são importantes e não devem ser desconsiderados. Damodaran (1999) propõe que o modelo Black & Scholes pode ser modificado segundo a Equação 7, para levar em conta o pagamento de dividendos, no caso de opções de longo prazo e se esperando um rendimento de dividendos ($\delta = \text{dividendos} / \text{valor atual do ativo}$) constante ao longo da vida da opção.

$$c = Se^{-\delta T} N(d_1) - ke^{-rT} N(d_2)$$

Equação 7 - Preço de uma *call* considerando-se o pagamento de dividendos

Onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Neste ajuste a taxa de juros é compensada pelos rendimentos dos dividendos para refletir o custo de inatividade relativo à detenção do ativo subjacente. Note que, quando não houver incidência de dividendos, o parâmetro δ será nulo, o termo $e^{-\delta T}$ valerá 1 e a equação corresponderá exatamente ao modelo Black & Scholes.

Para tornar mais clara toda a discussão deste item, seguem dois exemplos numéricos, ambos retirados de Cunha (2005). O primeiro não considera os dividendos. Já o segundo é mais próximo da realidade das oportunidades reais de investimento, pois inclui o pagamento de dividendos e terá a sua solução segundo a Equação 7.

- a) Exemplo 1 – O preço de uma ação, seis meses antes do vencimento de uma opção europeia, está em R\$42,00, o preço de exercício da opção é de R\$40,00, a taxa de juro livre de risco de 10% ao ano e a volatilidade de 20% ao ano. Isso significa que $S = 42$, $k = 40$, $r = 10\%$, $\sigma = 20\%$ e $T = 6$ meses.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{42}{40}\right) + \left(0,10 + \frac{0,20^2}{2}\right) \times \frac{6}{12}}{0,20 \sqrt{\frac{6}{12}}} = 0,7693$$

$$d_2 = 0,7693 - 0,20 \sqrt{\frac{6}{12}} = 0,6278$$

$$ke^{-rT} = 40e^{-0,10 \times \frac{6}{12}} = 38,049$$

Logo, se a opção for de compra, seu valor é dado por:

$$c = 42N(0,7693) - 38,049N(0,6278)$$

Se a opção for de venda, seu valor é dado por:

$$p = 38,049N(-0,6278) - 42N(0,7693)$$

Conforme a tabela do anexo I: $N(0,7693) = 0,7791$; $N(-0,7693) = 0,2209$; $N(0,6278) = 0,7349$ e $N(-0,6278) = 0,2651$. Dessa forma:

$$c = 4,76 \quad \text{e} \quad p = 0,81$$

O preço da opção de compra é R\$4,76 e o da opção de venda é R\$0,81. Portanto, o preço da ação deve subir para R\$44,76 ($40 + 4,76$) para que o titular da opção de compra não tenha lucro nem prejuízo. Similarmente, para que o titular de uma opção de venda não tenha lucro nem prejuízo, o preço da ação deve cair para R\$39,19 ($40 - 0,81$).

b) Exemplo 2 – Considerando uma opção de compra europeia sobre um índice, cuja maturidade se dará em dois meses. O valor atual do índice é de 930, o preço de exercício é de 900, a taxa livre de risco de 8% ao ano e a volatilidade deste índice de 20% ao ano. É esperado um fluxo contínuo de dividendos de 0,2% no primeiro mês e de 0,3% no segundo mês.

A taxa média dos dividendos é de 0,25% nos dois meses (ou 3% ao ano). Assim, o rendimento dos dividendos (δ) vale 0,03.

Considerando $S = 930$; $k = 900$; $r = 8\%$; $\sigma = 20\%$ e $T = 2$ meses:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{930}{900}\right) + \left(0,08 - 0,03 + \frac{0,20^2}{2}\right) \times \frac{2}{12}}{0,20 \sqrt{\frac{6}{12}}} = 0,5445$$

$$d_2 = 0,5445 - 0,20 \sqrt{\frac{2}{12}} = 0,6278$$

Utilizando novamente a tabela do anexo I, encontra-se $N(d_1) = N(0,5445) = 0,7069$ e $N(d_2) = N(0,6278) = 0,6782$.

Segundo a Equação 7:

$$c = 930e^{-0,03 \times \frac{2}{12}} \times 0,7069 - 900e^{-0,08 \times \frac{2}{12}} \times 0,6782 = 51,84$$

Portanto, o valor da opção é de \$51,84. Isso significa que o índice deve chegar a R\$951,84 (900 + 51,84) para que o comprador da opção de compra não ganhe nem perca.

3. A TEORIA DAS OPÇÕES REAIS

O conceito de uma opção real (OR) foi desenvolvido a partir da ideia de Myers (1977) de que uma empresa, ao executar uma oportunidade de investimento, estaria executando uma opção de compra sobre ativos reais. Neste sentido, as OR são investimentos em derivativos reais que conferem à empresa o direito, mas não a obrigação, de adotar certas ações no futuro (AMRAM e KULATILAKA, 1999).

Entretanto, a primeira aplicação da teoria de opções a ativos reais foi realizada por Tourinho (1979), na avaliação de uma reserva natural. O estudo considerava haver custos de manutenção das reservas de recursos naturais e que os custos de extraí-los aumentavam com o tempo. Na década de 80, diversos trabalhos abordaram a aplicação dessa teoria: Paddock, Siegel e Smith (1983,1985, 1987 e 1988) apresentaram um modelo para avaliação e decisão de investimentos em reservas petrolíferas; Brennan e Schwartz (1985) discutiram sobre decisões de abertura e fechamento de uma mina de cobre; McDonald e Siegel (1986) estudaram o tempo de construção das decisões de investimento; Trigeorgis e Mason (1987) debateram o valor da flexibilidade.

Após, a década de 90 marcou o lançamento dos primeiros livros específicos sobre essa metodologia. O mais importante foi sem dúvida o de Dixit & Pindyck (1994), “*Investment under Uncertainty*”, o qual, de forma bastante didática, dá uma visão abrangente da Teoria das Opções Reais, não só no nível das decisões da firma como também no nível agregado, isto é, na indústria e no nível governamental. A partir desse, muitos outros livros vieram. Entre eles se destacam: Trigeorgis (1995, “*Real Options in Capital Investments: Models, Strategies, and Applications*”), Amram & Kulatilaka (1999, “*Real Option: Managing Strategic Investment in a Uncertain World*”) e Copeland & Antikarov (2002, “*Real Options: A Practitioner’s Guide*”). Em literatura brasileira, destaca-se os trabalhos de Dias e seu livro de 2014, “*Análise de Investimentos em Opções Reais: Teoria e Prática com Aplicações em Petróleo e Outros Setores*”.

3.1 Opções Reais e Opções Financeiras

Ao longo do Capítulo 2, foram detalhados todos os conceitos de opções financeiras. Os mesmos princípios apresentados podem ser utilizados para se criar modelos de avaliação de ativos reais que possuam características de opções. Pode-se

assim, traçar um paralelo entre uma opção financeira e uma oportunidade de investimento (que pode ser chamada de uma opção real). De forma análoga a uma opção financeira, uma empresa que possua uma opção real tem o direito, mas não uma obrigação, de realizar um investimento para criação de valor (CUNHA, 2005). Exemplos existem dos mais diversos perfis como projetos de P&D, projetos do setor mineral e petróleo e gás, implantação de novas plantas e *joint ventures*. O Quadro 5, apresentado por Rigolon (1999), traz as principais características desta analogia.

Quadro 5 - Comparação entre opções financeiras (sobre ações) e opções reais

	OPÇÃO FINANCEIRA	OPÇÃO REAL
Custo	Preço do Exercício	Investimento
Ativo Subjacente	Ação	Projeto
Retorno do Ativo	Retorno da Ação	Retorno do Projeto
Ganhos de Capital	Variações no Preço da Ação	Variações no Valor do Projeto
Retorno com Dividendos	Fluxo de Dividendos da Ação	Fluxo de Caixa Líquido do Projeto

Fonte: Adaptação de Rigolon (1999), pág. 9.

A grande maioria dos investimentos em ativos reais (projetos) possui certas características próprias que nos permitem comparar com as opções financeiras. Como já descrito neste trabalho, as principais características na tomada de decisão de investimentos ou alocação de recursos são: irreversibilidade, incertezas diversas e possibilidade de adiamento (*timinig*). A presença dessas características, tanto em conjunto como isoladas, faz com que a teoria das opções reais deva ser utilizada em substituição a métodos tradicionais, como o FCD.

Para consolidar esses conceitos e diferenciar a avaliação com base em opções reais do método tradicional do FCD, que analisa somente o VPL ou a TIR, será mostrado um exemplo simples, adaptado do trabalho de Rigolon (1999).

Considera-se uma empresa que está decidindo no ano 0 investir em uma fábrica que produzirá um único produto para sempre. O investimento I é igual a \$3200 e é totalmente irreversível. A construção da fábrica é instantânea, ou seja, acontece no próprio instante 0. A produção será igual a uma unidade por ano, a um custo operacional C de \$600. O preço inicial P_0 é igual a \$1000, mas mudará no próximo ano: aumentará para \$1200, com 50% de probabilidade (p), ou diminuirá para \$800, também com

probabilidade $(1 - p)$ igual a 50%. Depois, o preço permanecerá no novo nível para sempre.

O valor esperado para o preço será:

$$E(P) = 0,5 \times 1200 + 0,5 \times 800 = 1000$$

Dada uma taxa de desconto r igual a 10% ao ano, será que esse é um bom investimento? A empresa deve investir agora ou será melhor ela esperar um ano, para ver o que acontece com o preço do produto?

Se a firma investir agora, no instante presente, o valor presente do projeto (V) é igual a \$4400. Deduzindo o investimento de \$3200, o VPL do projeto será igual a:

$$VPL = -I + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{|E(P) - C|}{(1 + r)^t}$$

$$VPL = -3200 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{|1000 - 600|}{(1 + 0,10)^t} = -3200 + 4400 = \$1200$$

Portanto, o VPL é positivo. De acordo com a regra do FCD, sendo o VPL maior que zero, a firma deveria investir agora.

Entretanto, essa decisão é incorreta. Na realidade, o VPL ignora a opção que a empresa tem de esperar até o ano seguinte, observar a evolução do preço do produto, para só então decidir se investirá ou não. Investir agora significa exercer a opção e pagar um custo de oportunidade igual ao valor da opção. Não investir agora significa preservar a opção até o próximo período e só exercê-la se o preço do produto aumentar. Mas, para decidir, a firma precisa calcular o valor da opção no instante 0.

Uma maneira possível é a adaptação da árvore binomial simples, representada na Figura 5, cujo método foi detalhado no capítulo anterior. Se a empresa espera mais um ano para investir e o preço subir para \$1200, o valor do projeto será:

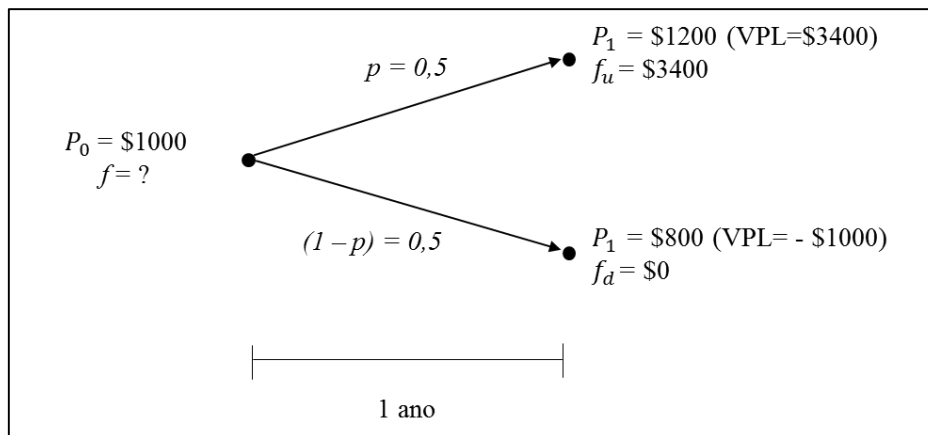
$$VPL = -3200 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{|1200 - 600|}{(1 + 0,10)^t} = -3200 + 6600 = \$3400$$

Este é o valor do fluxo de caixa trazido para o ano 1, considerando que no instante 0 não há despesa ou receita. Consequentemente, o valor da opção de espera (f_u), ao final desse período terá o mesmo valor: $f_u = \$3400$. Por outro lado, se o preço cair para \$800, o valor do projeto cai para:

$$VPL = -3200 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{|800 - 600|}{(1 + 0,10)^t} = -3200 + 2200 = -\$1000$$

Como, nessa hipótese de queda do produto, o valor do projeto torna-se negativo, a empresa não exerceria a sua opção (que “viraria pó”). Portanto, o valor da opção (f_d) é zero.

Figura 5 - Árvore binomial simples: opção de espera para investir



Fonte: Elaboração Própria.

Para calcular o valor da opção (f) de investir no ano 0, utilizaremos a Equação 2, onde $r = 10\%$; $T = 1$ ano; $p = 0,5$; $f_u = 3400$ e $f_d = 0$.

$$f = e^{-0,10 \times 1} [0,5 \times 3400 + (1 - 0,5) \times 0] = 1538,22 \approx \$1540$$

Se a firma investir no ano 0 (exercer a opção), o VPL do projeto será igual a \$1200, sendo \$4400 do valor presente do projeto (V) menos \$3200 do investimento. Mas o exercício da opção implica num custo de oportunidade $f = \$1540$. Portanto, o custo total

de investir hoje é \$4740 (3200 + 1540). O valor do projeto é menor que o custo total de investir (\$4400 < \$4740). Conseqüentemente, é melhor a firma esperar e manter a opção viva, em vez de investir agora.

Em resumo: a regra do VPL considera apenas o *payoff* ($V - I$). Se ele for positivo, a estratégia recomendada é investir imediatamente. Já a abordagem de opções introduz uma nova variável, f , igual ao valor da opção de esperar para investir no futuro ou ao custo de oportunidade de investir hoje. Se $f > V - I$, é melhor a firma adiar o investimento. Analogamente, se $f < V - I$, a firma deve investir agora.

A possibilidade de adiamento e a irreversibilidade do investimento são dois elementos cruciais para opor a regra do VPL à abordagem de opções (CUNHA, 2005). No exemplo, caso não houvesse possibilidade de adiamento de decisão, a empresa decidiria investir agora e regra do VPL se aplicaria. Alternativamente, se o investimento fosse totalmente reversível, ou seja, se a firma pudesse “desinvestir” no próximo ano e recuperar os \$3200 no caso de redução do preço do produto, a regra do VPL também valeria e a empresa investiria agora.

3.2 Principais tipos de opções

De acordo com Dias (2014), opções reais são flexibilidades gerenciais embutidas nas oportunidades de investimentos e projetos em geral. Algumas ocorrem naturalmente, independentes da vontade do gestor, enquanto outras podem ser planejadas e incorporadas em um projeto, porém, sob um custo adicional. Serão descritas as opções mais importantes e comuns. Outras opções, que tratam de variações das apresentadas abaixo, podem ser encontradas na literatura.

A. Opção de Espera

Raramente uma decisão é do tipo “agora ou nunca”. Assim, a opção de espera (timing) tem papel preponderante no processo decisório de um projeto. Devido à incerteza em relação aos fluxos de caixa futuros, um projeto pode tornar-se economicamente viável (ou de maior valor) caso espere por novas informações e/ou melhores condições, antes de investir. Naturalmente, quando o projeto é muito atrativo (*deep in the money*), a espera deixa de ter valor e o gerente deve iniciar logo o investimento.

B. Opção de Expansão

As opções de Expansão consistem basicamente em opções de compra onde o valor das oportunidades de crescimento depende dos possíveis investimentos futuros efetuados pela empresa. Também chamada de opção de crescimento ou, ainda, de escalonamento (sequenciamento) de investimentos, ela encontra grande aplicações em projetos pilotos e em projetos de P&D. Seu propósito seria quantificar o aspecto estratégico de um projeto. Um projeto pode apresentar VPL negativo durante a análise tradicional do FCD, mas na realidade ser bastante valioso, uma vez que, com um investimento relativamente pequeno, é possível obter informações e, caso as mesmas sejam favoráveis, originar investimentos de maior porte em projetos atrativos e com reduzida incerteza técnica. Caso as informações sejam desfavoráveis, o gerente simplesmente não exercerá a opção e não fará mais investimentos. A empresa também pode investir no novo projeto em etapas. A conclusão de cada estágio criará novas opções (prosseguimento, adiamento ou abandono). Todas elas, segundo Amram & Kulatilaka (1999), agregam valor à iniciativa proposta.

C. Opção de Abandono

Outra OR existente em alguns projetos é a opção de abandono, que é exercida quando os fluxos de caixa gerados pelo projeto não atendem às expectativas iniciais. Nesse caso, ao abandonar o projeto, a empresa recupera parte do investimento inicial realizado. Não existe obrigação de seguir um plano de negócios se ele não for mais lucrativo, podendo ser abandonado. Por exemplo, se um projeto de P&D chega numa planta industrial inovadora que se torna, por algum motivo, antieconômica, se torna interessante avaliar a alternativa de vender os ativos ou manter o projeto vivo.

D. Opção de Parada Temporária

Na vida real, as empresas não têm que operar sempre. De fato, se os preços do produto não são suficientes para cobrir os custos operacionais, talvez seja melhor não operar temporariamente, especialmente se os custos de mudança entre os modos de operação e inatividade são relativamente pequenos, podendo ser reiniciada a operação caso o cenário mude. Um exemplo atual, é o próprio cenário do setor de O&G.

E. Opção de Tempo de Construção

A opção de tempo de construção (*time to build*) pode também ser vista como uma sequência de opções de espera. Em projetos de indústrias intensivas em P&D, projetos com desenvolvimento de longo prazo e intensivo em capital, como obras na indústria petroquímica, nuclear, em usinas hidrelétricas e em grandes obras públicas, desenvolvimento de *startups*, entre outros.

F. Opção de Troca de Input/ Output

Quando uma empresa tem a possibilidade de alterar seus *inputs* ou *outputs* em decorrência de alguma alteração, satisfatória ou não, do mercado devido à flutuação possível no tempo, a empresa tem uma opção valiosa de flexibilidade. Por exemplo, uma geração elétrica *dual-fuel* (carvão e óleo combustível ou gás e óleo diesel). Às vezes essa opção não é planejada, havendo um custo relativamente alto para exercê-la, como a conversão de um automóvel, de álcool para gás natural. A opção de flexibilidade do produto (*output*) tem sua importância para o caso de refinarias, que através de investimentos podem alterar um pouco o perfil de refino (proporção relativa de derivados de petróleo produzida).

G. Opção de Escala Reduzida

A opção de redução de escala produtiva, em função de novos dados de mercado, pode exigir otimizações de escala para maximizar o lucro. No entanto, do ponto de vista de decisão de operação, por exemplo, devido ao efeito técnico da depleção da jazida que faz a produção declinar com o tempo, pode ser possível a liberação para uso alternativo de alguns equipamentos que forem ficando ociosos. A redução de escala pode não só reduzir o custo operacional, como obter um valor residual de parte dos equipamentos a serem desativados.

3.3 Interações entre opções

As diversas opções reais existentes ainda podem ser distribuídas dentro de uma forma alternativa de classificação, considerando as respectivas interações:

- a) Opções Reais Simples: são os casos onde só há um tipo de opção ou, quando há mais de um, somente a mais relevante é considerada;

- b) Opções Reais Compostas: quando o exercício da opção resulta na aquisição de uma outra opção (como os investimentos planejados em etapas); e
- c) Opções Reais Múltiplas: também denominadas de opções compostas do tipo arco-íris por Copeland & Antikarov (2002), elas são movidas por múltiplas fontes de incerteza e representam a interação de várias opções simultaneamente. Esses casos são os mais complexos, porém, os mais próximos da realidade.

Segundo Costa (2007), frequentemente se reconhecem e se avaliam diversos tipos de OR embutidas em um mesmo projeto. Geralmente seus valores são não aditivos e o cálculo do valor combinado pode ser complexo. Em alguns casos, Trigeorgis (1996) descreve a interação entre opções como basicamente aditivas. Este é o caso quando as opções que estão interagindo são de tipos diferentes, por exemplo, de venda e de compra. Caso contrário, o valor combinado da interação de opções pode ser maior ou menor do que a soma de seus valores individuais.

De um modo geral, para efeito de aplicação nas decisões de investimento em P&D, e, mais especificamente, em projetos do setor petrolífero, devem-se considerar como relevantes as interações entre opções do mesmo tipo, como opções de timing e de expansão (CUNHA, 2005). De modo contrário, podem ser considerados desprezíveis o efeito de interações entre opções opostas e temporalmente distantes, como opções de timing e de abandono.

4. As opções reais em P&D

Desde os anos 80 se discute a aplicabilidade de metodologias já bem estabelecidas na prática empresarial para avaliação de projetos de investimento com alto grau de incerteza, como relatado por Faulkner (1996) e Neves (1992). Os projetos de Pesquisa e Desenvolvimento (P&D) são representantes por excelência dessa categoria de investimento, onde o risco de fatores adicionais às incertezas naturais de mercado - como a incerteza técnica, por exemplo - leva as avaliações feitas em bases metodológicas convencionais a uma penalização que, frequentemente, conduz as empresas ao subinvestimento em P&D.

Outros autores apresentaram trabalhos abordando o uso de opções reais em P&D como: Santiago & Vakili (2005); Santos & Pamplona (2002); Schwartz (2001); Mun (2006) em obra mais ampla, com diversos estudos de casos; Paxon (2003), numa coletânea de artigos; Huchzermeier & Loch (2001); Silva & Santiago (2009).

Do ponto de vista dos métodos financeiros convencionais, baseados no Valor Presente Líquido de um Fluxo de Caixa Descontado (FCD), os projetos de P&D só geram custos, não geram fluxos de caixa positivos. Devido ao “maior risco”, se utilizam de taxas de desconto elevadas – geralmente atingindo um patamar muito além da atratividade exigida por projetos de empreendimento sem esse tipo de risco, normalmente definida pelo custo de capital da firma (SAMANEZ, 2007) – e, em geral, apresentam VPLs negativos. Por isso esses projetos ou não são desenvolvidos ou não são avaliados pelas práticas normais de orçamentação de capital, e são designados como “projetos estratégicos” (DIAS, 2014).

Por outro lado, a premissa do gerenciamento ativo na presença de flexibilidade, ao longo da vida dos projetos, é característica metodológica essencial que requer instrumentos diferenciados (LEITE, 2011). Então, na proposta de avaliar adequadamente essa categoria especial de investimento, um gestor reavaliando periodicamente as incertezas endógenas, em certo grau controláveis, e exercendo ações ótimas sobre elas, maximizando o seu valor, é crucial para o sucesso de projetos como esses.

Estas questões fizeram com que empresas intensivas em P&D adotassem rapidamente as técnicas de OR. Desse ponto de vista, os projetos de P&D (e também

projetos de teste de mercado) geram oportunidades de crescimento para a empresa, ou seja, geram OR valiosas que capacitam a empresa a melhorar seu desempenho operacional e competitivo no mercado e/ ou reagir melhor às mudanças de cenário, exercendo novas opções criadas pelo seu portfólio de projetos de P&D ou de teste de novos produtos.

4.1 Estrutura do processo de P&D

Investimentos em P&D não são feitos na expectativa de resultados imediatos, mas sim, têm a esperança de criar oportunidades de investimentos futuros que serão rentáveis. Desta forma, os projetos de P&D deveriam ser vistos como séries de decisões sequenciais envolvendo a fase de P&D e fase de comercialização com diferentes riscos e incertezas (MORRIS, TEISBERG e KOLBE, 1991), riscos e incertezas que venham a ser diminuídos na medida em que projeto prossegue.

Segundo os mesmos autores, o propósito de projetos de P&D é aumentar as receitas futuras ou diminuir os custos futuros. Desta forma, esforços de P&D deveriam ser considerados como parte da estratégia de longo prazo da empresa, ao invés de projetos isolados. Os ganhos potenciais de projetos subsequentes que sejam possíveis pela pesquisa devem ser avaliados ao se determinar o valor da pesquisa empreendida. Quando se decide investir certa quantia em P&D, o que realmente procura-se avaliar são as oportunidades (LUEHRMANN, 1997). Para o autor, oportunidades são diferentes de *assets-in-place* porque quem toma a decisão age depois de estar resolvida a incerteza, ao invés de tomar a decisão e então entender o que acontece. Luehrman conclui que a abordagem das opções é mais adequada para avaliar oportunidades.

A partir da perspectiva das opções, a sequência da avaliação tem uma estrutura muito específica (AMRAN e KULATILAKA, 2000). O primeiro estágio da exploração do investimento adquire a opção de continuar com o segundo estágio de desenvolvimento, e assim por diante. Isto é da estrutura de “opção composta”, vista anteriormente. Quando visto como parte de uma sequência de opções, cada estágio pode ser visto como uma opção de compra no valor da continuação com o projeto, um valor que inclui o valor de todas as opções futuras.

Segundo Santos e Pamplona (2002), se os resultados da fase de pesquisa não correspondem às expectativas, o projeto pode, por exemplo, simplesmente parar, evitando perdas que se realizariam pela continuação do investimento no projeto. Existe, entretanto, um número de outras possibilidades de reagir às mudanças circunstanciais. O projeto pode ser aprimorado até o ponto de preocupação de seu escopo, parar e esperar pela chegada de novas informações ou o escopo do projeto pode ser alterado.

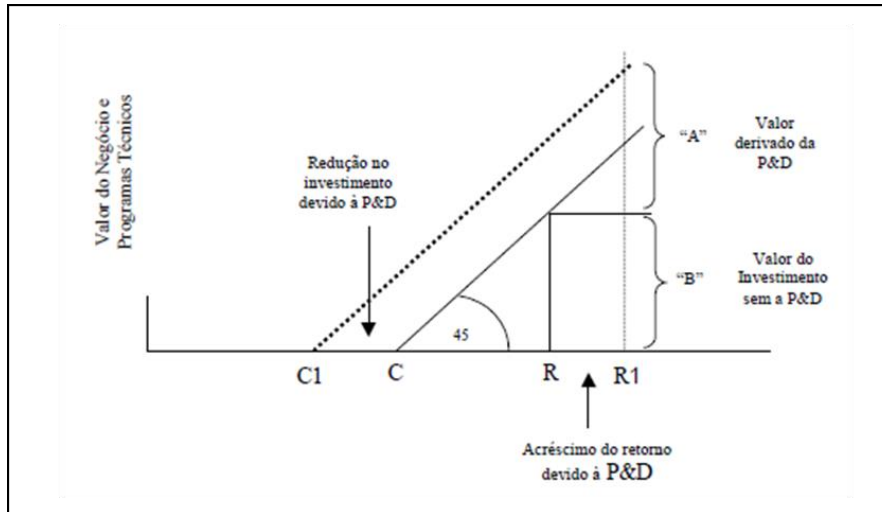
Opções de P&D têm uma vantagem muito importante sobre as opções de ativos. Segundo Mitchell e Hamilton (1988), a compra de uma opção de ativo não tem efeito direto no preço de exercício ou no preço futuro do ativo, enquanto “o maior propósito da opção de P&D é influenciar favoravelmente o investimento futuro, quer pela diminuição de custos ou pela elevação dos retornos”, desta forma, poderíamos dizer que uma opção de P&D é mais valiosa do que uma opção de ativos, uma vez que é possível atuar em seu valor futuro.

A Figura 6 apresenta a estrutura de uma opção similar àquela usada para a opção de um ativo. Com ela será mostrado o efeito da opção de P&D sobre o valor do ativo. Assume-se que a empresa espera fazer investimentos futuros a um custo C (análogo ao preço de exercício), o que produzirá um retorno R (análogo ao valor do ativo quando adquirido). O investimento será viável para $R > C$, e o valor do investimento para a empresa é mostrado como “B”. Entretanto, programas bem-sucedidos de P&D podem resultar numa redução de custo do investimento potencial de C para $C1$. Programas de P&D também podem elevar o retorno, aumentando-o de R para $R1$. O resultado esperado é que os programas de P&D têm o potencial de produzir um benefício “A”, o que aumenta o valor total do investimento.

Numa visão baseada nas sequências de avaliação, já citada anteriormente, segundo Herath e Park (1999), um investimento em P&D pode ser visto como um custo (I_0) de uma opção real na qual o projeto comercial prossegue somente se houver sucesso na fase de P&D. Mais especificamente, o custo de investimento em comercialização no novo projeto pode ser visto como o preço de exercício (I_c) e o valor presente do fluxo de caixa futuro (V) proveniente da comercialização pode ser visto como o valor do ativo subjacente. A data de introdução do novo produto no mercado pode ser vista como a data de exercício. Enquanto assume-se que a decisão de comercialização é provável que ocorra

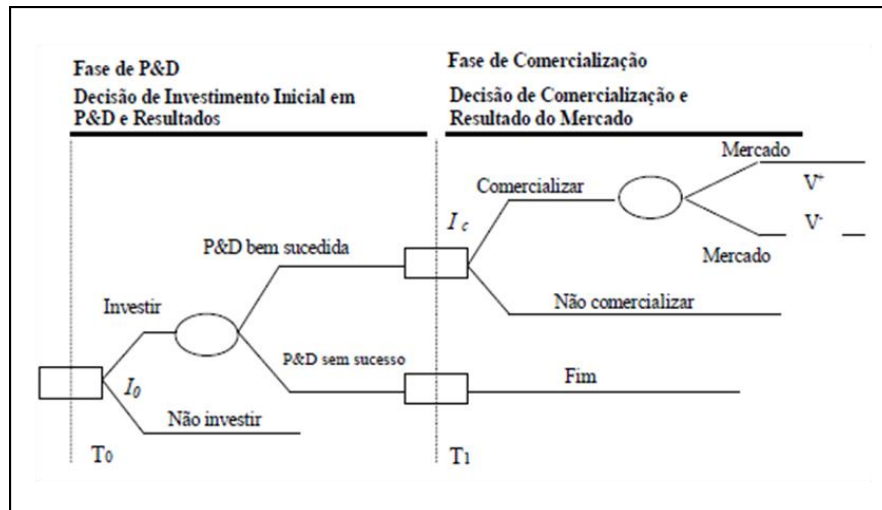
numa data T_1 , o tomador da decisão poderia considerar a opção de adiar a decisão de comercialização (ver Figura 7). A opção de esperar em tal instância tem valor enquanto a opção de comercialização não é exercida.

Figura 6 - Impacto da opção de P&D em futuros investimentos



Fonte: Mitchell e Hamilton, 1988

Figura 7 - Árvore de decisão típica para processos de investimentos sequenciais em P&D



Fonte: Herath e Park, 1999

4.2 P&D no setor de petróleo e gás

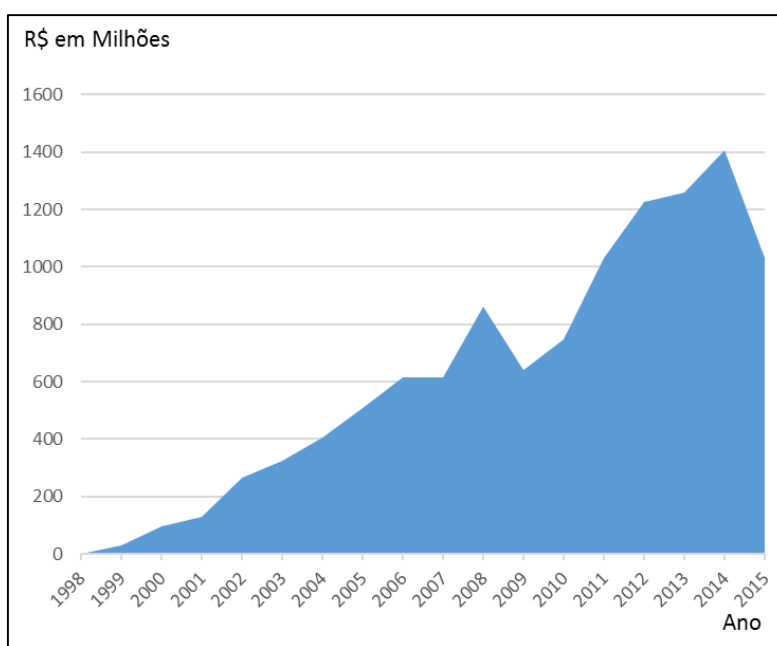
O foco deste trabalho se dá na avaliação de projetos de P&D no setor de petróleo e gás. Há então de se caracterizar esses projetos para que se entenda quais os modelos de avaliação mais propriamente se adequam.

Atualmente, há no setor de petróleo e gás uma legislação específica para os investimentos em P&D. A partir da Lei 9.478 de 06 de agosto de 1997, conhecida como Lei do Petróleo, estabelece dentre as atribuições da ANP “a competência de estimular a pesquisa” e a “adoção de novas tecnologias para o setor de petróleo e gás natural”. Para tanto a ANP incluiu, desde o ano de 1998, na Rodada Zero, nos Contratos de Concessão para Exploração, Desenvolvimento e Produção de Petróleo e/ou Gás Natural, cláusula denominada – Investimentos em Pesquisa e Desenvolvimento. Assim, a Resolução ANP nº 50/2015 e o Regulamento Técnico ANP nº 3/2015, recentemente atualizados, especificam o montante e os requisitos técnicos a serem atendidos pelos investimentos.

Em geral, para os Contratos de Concessão, Contratos de Partilha e de Cessão Onerosa, o valor da obrigação de investimento corresponde a 1% da receita bruta da produção de petróleo, gás natural e outros hidrocarbonetos líquidos nos campos abrangidos nestes contratos. Trata-se de quantias bastante significativas e que chegaram a R\$1,03 bilhão, somente em 2015. Então, se fazem ainda mais necessárias técnicas de avaliação de investimento que otimizem os retornos e que auxiliem as empresas a serem mais rentáveis, principalmente na época de crise – econômica e política – em que se encontra o setor. A evolução das obrigações pode ser vista no gráfico apresentado na Figura 8.

Considerando os valores investidos desde 1998, o montante acumulado já alcançou a marca expressiva de R\$11,2 bilhões. Deste total, a Petrobras investiu 95%, sendo os outros 5% oriundos de outras concessionárias como BG Brasil, Repsol-Sinopec, Statoil, Sinochem, Petrogal, Chevron, Shell, entre outras.

Figura 8 - Obrigações de investimentos em P&D gerada por ano



Fonte: Relatório mensal SPG/ANP

Do valor de investimento de 1% da receita bruta de produção dos campos, o regulamento também define os percentuais que podem ser aplicados em diferentes modelos: pelo menos 50% dessa parcela deverão ser alocados em projetos ou programas executados por Instituições de Ciência e Tecnologia credenciadas junto à ANP; pelo menos 10% dos recursos deverão ser aplicados em projetos ou programas executados por Empresas Brasileiras; e o restante poderá ser aplicado em projeto ou programa executado em instalações da própria empresa ou afiliada, desde que localizada no Brasil.

Além de definir os valores destinados a investimentos em P&D e quais os percentuais permitidos a cada ator, este mesmo regulamento da ANP também define quais atividades são consideradas de P&D. São elas:

- Pesquisa básica, pesquisa aplicada e desenvolvimento experimental, incluída a pesquisa em meio ambiente e em ciências sociais, humanas e da vida;
- Construção de protótipo e unidade-piloto;
- Desenvolvimento de *software*, desde que este envolva significativos avanços tecnológicos ou científicos.

4.3 O modelo de Geske para projetos de P&D em O&G

Numa conclusão dos dois itens anteriores, é possível dizer que os projetos de P&D no setor de petróleo e gás se caracterizam por dois grandes conceitos. O primeiro é o fato de que as empresas do setor investem de forma continuada em P&D, obtendo maior parte do retorno nesse tipo de investimento por meio de inovações incrementais de processo. De fato, poucas são as empresas que chegam a comercializar o resultado de seus projetos. As inovações em geral ocorrem no processo produtivo e são implementadas ao fim da fase de desenvolvimento, resultando em pequenos, porém significativos, avanços de eficiência como, por exemplo, menor custo operacional. O segundo conceito é que as opções desse tipo de projeto são compostas, ou seja, quando o exercício da opção resulta na aquisição de uma outra opção, onde cada estágio pode ser visto como uma opção de compra no valor da continuação com o projeto.

Um modelo para avaliação de opções compostas foi proposto por Geske (1979). Analisando os conceitos apresentados, esse modelo adequa-se bem aos requisitos de avaliação de projetos de P&D em O&G. O autor aplicou o modelo num projeto que apresenta oportunidades de crescimento, seguidas ao investimento inicial. A primeira seria o investimento K^* na fase de testes, já a segunda, seria o investimento K em produção e comercialização para se obter o fluxo de caixa do projeto.

Segundo Perlitz, Peske e Schrank (1999), assumindo que o valor do projeto segue o processo do Movimento Geométrico Browniano (MGB) – processo mais utilizado no mercado para modelar o comportamento de preço de ações, de preço de mercadorias e de outras variáveis financeiras e econômicas, que não será demonstrado neste trabalho – esta opção composta pode ser avaliada analiticamente em termos de integrais da distribuição normal bivariada. Uma opção composta pode ser analisada analiticamente pela abordagem de avaliação de Geske (1979) e ajustada para avaliação de opções reais por Kemna(1993). Segue a formulação:

$$G = Fe^{-r\tau}M(k, h; \rho) - Ke^{-r\tau}M(k - \sigma\sqrt{\tau^*}, k - \sigma\sqrt{\tau}; \rho) - K^*e^{-r\tau}N(k - \sigma\sqrt{\tau^*})$$

Equação 8 - Modelo Geske (1979) adaptado por Kemna (1993).

Onde:

K = valor presente dos gastos da iniciativa de comercialização (implementação);

K^* = valor presente dos gastos de capital na iniciativa pioneira;

σ = volatilidade da taxa de câmbio na iniciativa de comercialização (implementação);

τ = data de maturação da opção simples;

τ^* = data de maturação da primeira opção (dentro da opção composta);

r = taxa de desconto livre de risco;

F = valor presente do fluxo de caixa da comercialização (implementação);

F_c = valor crítico do projeto acima do qual a primeira opção será exercida

$M(k, h; \rho)$ = função distribuição normal acumulada bivariada com k e h como os limites superiores e inferiores e coeficiente de correlação ρ , sendo:

$$\rho = \left(\frac{\tau^*}{\tau}\right)^{1/2}$$

Cálculo de h e de k :

$$h = \frac{\ln(F/K) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$k = \frac{\ln(F/F_c) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau^*}{\sigma\sqrt{\tau^*}}$$

$N(k - \sigma\sqrt{\tau^*})$ = função distribuição normal acumulada univariada (pode ser encontrada utilizando o anexo I).

Utilizando-se, dessa forma, a fórmula de precificação de opção composta de Kemna, resulta em um valor da opção composta G . Para chegar ao resultado final do valor do projeto, há a soma do valor presente do investimento inicial (*sunk cost*) e do valor das oportunidades de crescimento – que é o valor da opção composta G –, resultando no VPL(Geske).

Para aplicar o modelo aqui exposto em um projeto específico do setor de O&G, será desenvolvido no próximo capítulo um estudo de caso. Com este estudo de caso quer se demonstrar que a metodologia de avaliação de opções compostas corresponde a uma melhora aplicabilidade dos modelos mais comuns dos projetos de P&D em O&G.

5. Estudo de caso

Neste capítulo será elaborado um estudo de caso cujo objetivo é demonstrar, através de um exemplo hipotético, meramente ilustrativo e com premissas adotadas pelo autor com base nas mais diversas fontes de informações e nas suas próprias convicções, como funcionaria na prática a teoria das opções reais aplicada a um projeto de P&D no setor de petróleo e gás. Ao longo deste trabalho, foram apresentadas as características de projetos com este perfil. Trata-se de projetos com decisões sequenciais que se caracterizam como opções compostas. Como visto anteriormente, o modelo de Geske adaptado por Kemna (1993) representa um bom modelo para a avaliação de opções deste tipo.

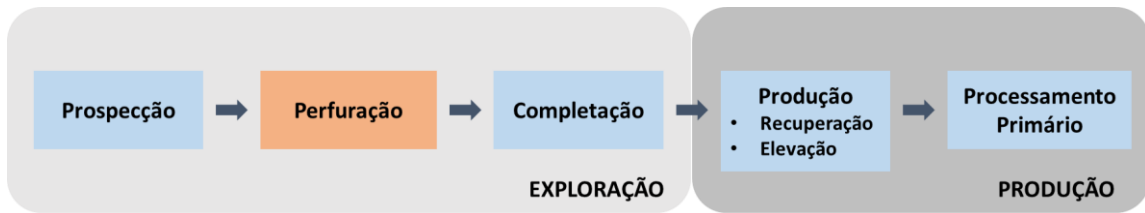
Durante o estudo de caso, o maior conhecimento possível sobre investimentos no setor tentará ser passado. Isso envolve desde conceitos de engenharia de petróleo, chegando até a moderna teoria das opções reais. Vale lembrar que essas informações foram acumuladas ao longo da permanência do autor na bolsa de pesquisa cedida pela ANP através do PRH-21, em convênio com o curso de Engenharia de Produção da UFRJ.

5.1 Definição do projeto

Atualmente, o setor de petróleo e gás natural brasileiro vem atravessando uma crise. Com diversos investimentos comprometidos em projetos do pré-sal, a empresa RG, de exploração e produção, vem enfrentando grandes problemas quanto aos custos desses projetos. Por isso, vem buscando alternativas para reduzir os custos desses projetos.

Segundo Thomas (2004), os processos de perfuração de poços significam até 80% dos custos de perfuração de poços, que podem ser considerados, numa média do setor, um total de U\$10 milhões, para um poço. Então, iniciativas inovadoras que atuem no processo de perfuração de poços, reduzindo, por exemplo, o tempo de construção dos poços, podem trazer grandes benefícios aos custos do projeto. A Figura 9 mostra as etapas básicas das operações de Exploração e Produção (E&P). A título de curiosidade, é possível perceber que é da natureza do setor o avanço em etapas, a etapa anterior servindo de base para a seguinte, num sentido, de cada vez mais, reduzir as incertezas e aumentar o valor esperado nas atividades.

Figura 9 - Esquema básico das atividades de E&P

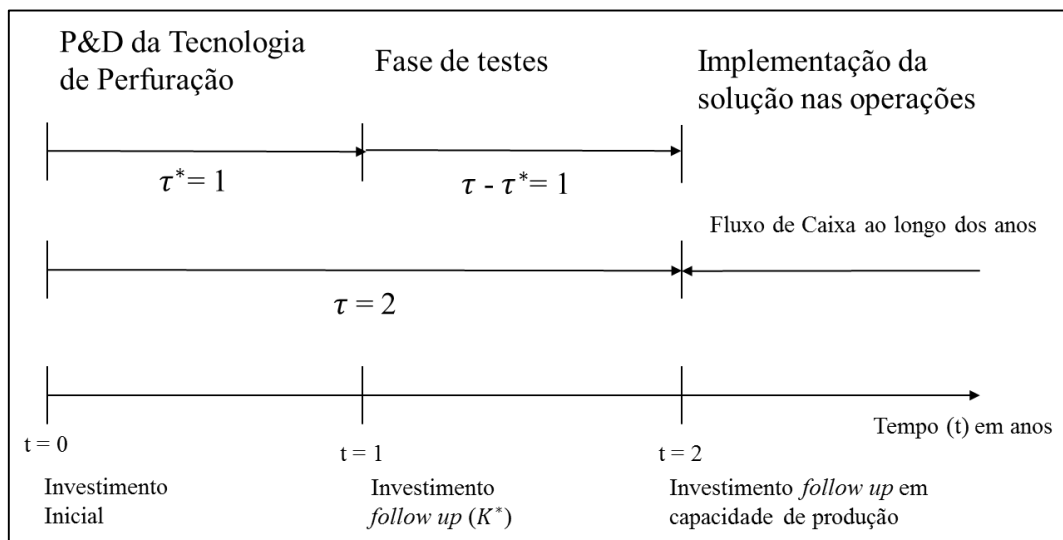


Fonte: Elaboração Própria.

Neste contexto, essa empresa de E&P tem uma oportunidade de investimento em uma tecnologia inovadora de perfuração. Os pesquisadores têm certas evidências quanto à eficiência dessa tecnologia no aumento da taxa de perfuração, o que resultaria na redução do tempo de construção de um poço e, conseqüentemente, reduziria parte do CAPEX do projeto de um poço.

O processo de desenvolvimento desse projeto está dividido em etapas e, assim, dividida em decisões sequenciais. Por este motivo, conforme apresentado anteriormente, se enquadra como uma opção real composta. A Figura 10 mostra através de um esquema simplificado como se dão as fases da pesquisa e os marcos do projeto.

Figura 10 - Esquema simplificado do Processo de P&D da Tecnologia de Perfuração



Fonte: Adaptação de Kemna (1993).

O projeto se inicia já com alguns esboços de solução, sendo levado em consideração aqui neste estudo, o efetivo desenvolvimento de um produto final, seus testes de confiabilidade e eficiência em condições reais e sua implementação quanto

solução nos projetos de E&P da empresa. Há então duas oportunidades de crescimento seguidas do investimento inicial. A primeira seria o investimento K^* nas fases testes e a segunda seria o investimento K na implementação da solução, para se obter o fluxo de caixa do projeto. O investimento inicial é de R\$2 milhões.

No próximo item, serão abordadas as variáveis que formam o modelo de Geske para opções reais compostas. Os dados que serão utilizados são baseados em valores médios encontrados em Thomas (2004) e comumente utilizados na indústria.

5.2 Variáveis do projeto

Conforme apresentado no capítulo anterior, o modelo de Geske com adaptação de Kemna (1993) engloba diversos fatores naturais dos projetos de P&D no setor de O&G. Assim, é preciso definir quais as variáveis do projeto da Tecnologia de Perfuração:

- **K = valor presente dos gastos da iniciativa de implementação:** segundo perspectivas da equipe pesquisadora, para implementar a solução nos projetos de exploração seriam necessários investimentos próximos a R\$350 milhões, referentes à viabilização da tecnologia como ferramenta operacional;
- **K^* = valor presente dos gastos de capital na iniciativa pioneira:** foram estipulados gastos de R\$3 milhões para que a tecnologia desenvolvida pudesse performar todos os testes;
- **τ = data de maturação da opção simples:** o tempo de dois anos foi o estipulado para a tecnologia chegar ao nível necessário para implementação;
- **τ^* = data de maturação da primeira opção (dentro da opção composta):** tempo de um ano, referente à fase de desenvolvimento da tecnologia, que servirá de base para a fase de testes;
- **r = taxa de desconto livre de risco:** taxa de 5% como valor plausível no setor (PEREIRA, 2004);
- **F = valor presente do fluxo de caixa simples da implementação:** a atuação da tecnologia se dá na redução de custos de construção de poços, ou seja, no

CAPEX do projeto de E&P. Assim, os fluxos de caixa do projeto são formados pelos valores economizados na atividade de perfuração. A equipe estima que seja possível ter reduções de 20% no tempo de construção de poços, em média. Atualmente, numa média dos projetos marítimos da empresa, o tempo de construção de um poço é de 100 dias, com custos diários (custo total uniformemente distribuído) de R\$200 mil, totalizando uma média de R\$20 milhões para um poço. Assim, com a redução esperada pela equipe, seria possível reduzir a 80 dias, com economias de R\$4 milhões por poço. É considerada uma taxa de construção de 30 poços anualmente, em média. Ainda, é esperado que o fluxo de caixa previsto para o projeto seja de 12 anos. Dessa forma, se utilizando da ferramenta EXCEL, encontra-se o fluxo de caixa do projeto no valor de R\$623 milhões;

- **F_c = valor crítico do projeto acima do qual a primeira opção será exercida:** como política de P&D da empresa, ela só investe na fase de testes, as tecnologias de E&P que tragam ganhos de pelo menos 15%. Sendo assim, será adotado o valor de economia de R\$3 milhões, que projetados retornam um fluxo de caixa hipotético de R\$312 milhões;
- **σ = volatilidade do retorno dos ativos da empresa:** a empresa tem uma taxa de volatilidade dos resultados de projetos de P&D de 0,3 e ela será adotada neste modelo. Esse valor apresenta bastante aderência com as propostas apresentadas por Kemna (1993).

5.3 Aplicação do modelo

Ao definirmos as variáveis do modelo, temos as bases para aplicação do mesmo no caso da tecnologia de perfuração da RG. Seguindo as equações apresentadas no capítulo 4, temos:

$$\rho = \left(\frac{\tau^*}{\tau}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = 0,707$$

Cálculo de h e de k :

$$h = \frac{\ln\left(\frac{623.653.000}{350.000.000}\right) + \frac{1}{2}(0,3)^2 \times 2}{0,3\sqrt{2}} = 1,57$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{623.653.000}{467.000.000}\right) + \frac{1}{2}(0,3)^2 \times 1}{0,3\sqrt{1}} = 1,11$$

Assim, temos:

$$N(k - \sigma\sqrt{\tau^*}) = N(0,81) = 0,7910, \text{ utilizando o anexo I;}$$

$$M(k, h; \rho) = M(1,11, 1,57; 0,707) \cong 1,00$$

$$M(k - \sigma\sqrt{\tau^*}, k - \sigma\sqrt{\tau}; \rho) = M(0,81, 0,42; 0,707) \cong 0,55$$

Dessa forma, utilizando-se, desta forma, a fórmula de precificação de opção composta de Kemna, resulta um valor da opção composta de:

$$G = Fe^{-r\tau}M(k, h; \rho) - Ke^{-r\tau}M(k - \sigma\sqrt{\tau^*}, k - \sigma\sqrt{\tau}; \rho) - K^*e^{-r\tau}N(k - \sigma\sqrt{\tau^*})$$

$$G = \text{R\$}442.883.322$$

O valor do projeto consiste do valor presente dos *assets in place* e o valor presente das oportunidades de crescimento captado com a avaliação da abordagem baseada em opções.

Valor do projeto = custo afundado (investimento inicial) + oportunidades de crescimento (opção composta)

O valor de se no projeto de tecnologia de perfuração é, portanto, igual a:

$$\text{VPL (Geske)} = \text{R\$}442.883.322 - \text{R\$}2.000.000 = \text{R\$}440.883.322$$

Assim:

$$\mathbf{VPL (Geske) = R\$440.883.322}$$

O valor presente líquido do projeto, calculado da maneira tradicional resultaria em um valor de:

$$VPL = -2.000.000 - \left(\frac{3000000}{(1,16)^{-1}}\right) - \left(\frac{350000000}{(1,16)^{-2}}\right) + \left(\frac{623653000}{(1,16)^{-2}}\right) = 314.277.480$$

$$\mathbf{VPL (trad)= R\$314.277.480}$$

O valor obtido pelo modelo de Geske, feitas as ressalvas às aproximações, é cerca de 41% maior do que aquele obtido pelo modelo tradicional. Pode-se então buscar razões que expliquem essa diferença, dentre elas:

- A alta volatilidade do valor das ‘saídas’ da P&D influencia positivamente o valor da opção porque grandes retornos podem ser gerados, mas pequenos retornos podem ser evitados pela reação às mudanças das condições. No VPL, altas volatilidades trazem um prêmio de risco na taxa de desconto e a um menor VPL;
- Longos horizontes de tempo permitem mais tempo para reagir às mudanças das condições. No caso do exemplo, existe a possibilidade de parar o investimento ou investir se os resultados das fases anteriores forem conhecidos. Este efeito é levado em consideração nas avaliações das opções reais, não no cálculo tradicional do VPL;
- As técnicas do FCD são muito dependentes da taxa de desconto aplicada. No caso de projetos de P&D estas taxas são frequentemente ajustadas ao risco, isto é, conduzem a altos descontos. Na precificação por opções o uso da taxa ajustado ao risco é evitado;
- O efeito da taxa de desconto é, além disto, reforçado por longos horizontes de tempo aplicados às decisões de investimento em P&D.

É importante ressaltar que, embora, nesse estudo de caso, diversas premissas válidas em relações às variáveis foram levadas em consideração, o avaliador deve sempre analisar o que cada valor representa. Todos eles devem estar bem aderentes à realidade e devem fazer sentido num espectro mais amplo do problema. Pode ser considerado de grande valor a realização de uma análise de sensibilidade, conseguindo testar assim como essas variáveis se comportam dados diferentes valores dos outros dados do problema.

6. CONCLUSÃO

A moderna teoria de investimento sob incerteza, desenvolvida através da teoria das opções reais, representa uma evolução na metodologia de análise de projetos e encontra inúmeras aplicações em diversos tipos de projetos. O método tradicional do FCD ignora uma série de opções reais valiosas, que estão embutidas nesses projetos, tais como a opção de esperar por melhores condições e novas informações (timing de investimento), a opção estratégica de crescimento/expansão, a opção de mudança de uso, a opção de abandono e até opções compostas por algumas delas. O uso do FCD pode levar a erros significativos, quando a incerteza e/ou a existência de flexibilidades são relevantes no projeto, como ocorre frequentemente em projetos de P&D e E&P de petróleo.

Em EVTEs, o FCD frequentemente subavalia o projeto e ao mesmo tempo recomenda o imediato investimento, quando o melhor seria esperar por melhores e novas informações antes de investir. Outras vezes o FCD rejeita projetos em que seria ótimo iniciar o investimento, tais como projetos com relevante incerteza técnica, caso de projetos de P&D. Como visto, esses projetos têm características de decisões sequenciadas, sendo muito bem aplicadas a opções reais compostas.

Ainda, no cenário atual da indústria do petróleo e gás no Brasil, tanto as cláusulas de investimento de P&D, quanto a crise do setor, fazem com que as análises de investimento em projetos de P&D sejam ainda mais importantes nas decisões das empresas. Neste contexto, o modelo apresentado incorpora as modernas técnicas de investimento, que estão mais bem adaptada para lidar com os conceitos de incerteza (tanto técnica quanto econômica), *timing* e irreversibilidade, tão presente nos investimentos desse tipo.

Talvez devido à sua maior complexidade de cálculos, envolvendo certo grau de conhecimento matemático, financeiro e estatístico, a Teoria das Opções Reais ainda não esteja bastante difundida. Contudo, o avanço tecnológico permitirá a divulgação das teorias aqui expostas e, cada vez mais, as opções reais se tornarão uma poderosa ferramenta de análise de investimentos.

Bibliografia

AMRAM, M.; KULATILAKA, N. **Real Options – Managing Strategic Investment in an Uncertain World**. Boston, MA, EUA: Harvard business School Press, 1999. 246.

BREALEY, A.; MYERS, S. C. **Principles of Corporate Finance**. [S.l.]: Irwin/McGraw-Hill, 2003.

COPELAND, T.; ANTIKAROV, V. **Opções Reais: Um Novo Paradigma para Reinventar a Avaliação de Investimentos**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2002.

COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. **Option Pricing: A Simplified Approach**. Journal of Financial Economics, Outubro 1979. vol. 7.

CUNHA, R. L. **Opções Reais: A utilização dessa ferramenta para análise de investimentos no setor de petróleo e gás natural**. Projeto de Graduação, Rio de Janeiro, 2005. 114.

DAMODARAN, A. **Análise de Investimentos: Ferramentas e Técnicas para a Determinação de Valor de Qualquer Ativo**. Rio de Janeiro: Qualitymark Editora, 1999.

DIAS, M. A. G. **Análise de Investimentos com Opções Reais - Teoria e Prática com Aplicações em Petróleo e Outros Setores**. Rio de Janeiro: Interciência, v. I, 2014.

DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. **Investment under Uncertainty**. [S.l.]: Princeton University Press, 1994.

FAULKNER, T. W. **Applying “Option Thinking” To R&D Valuation**. Research Technology Management, v. 39, n. 3, p. 50, 1996.

GESKE, R. **The Valuation of Compound Options**. Journal of Financial Economics, n. 7, p. 63-81, 1979.

HEREATH, H. S. B.; PARK, C. S. **Economic Analysis of R&D Projects: An Options Approach**. The Engineering Economist, v. 44, n. 1, p. 135, 1999.

HUCHZERMEIER, A.; LOCH, C. H. **Project management under risk: Using real options approach to evaluate flexibility in R&D**. Management Science, n. 47, p. 85-101, 2001.

HULL, J. C. **Introdução aos Mercados Futuros e de Opções**. São Paulo: BM&F, 1996.

KEMNA, A. G. Z. **Case Studies on Real Options**. Financial Management, v. 22, n. 3, 1993.

- LEITE, L. A. M. **Opções reais sob incerteza Knightiana na avaliação econômica de projetos de pesquisa e desenvolvimento (P&D)**. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- LUEHRMAN, T. A. **Investment Opportunities as Real Options: Getting Started on the Numbers**. Harvard Business Review, v. 76, n. 4, p. 51-67, Julho 1998.
- MCDONALD, R. L.; SIEGEL, D. R. **The Value of Waiting to Invest**. Quarterly Journal of Economics, vol. 101, n° 4, Novembro 1986.
- MITCHELL, G. R. . H. W. F. **Managing R&D as a Strategic Option**. Research Technology Management, p. 15-22, Maio-Junho 1988.
- MORRIS, P. A.; TEISBERG, E.; KOLBE, A. L. **When Choosing R&D Projects, Go With Long Shots**. Research Technology Management, v. 34, n. 1, Fevereiro 1991.
- MUN, J. **Real options Analysis – Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions**. New Jersey, EUA: John Wiley & Sons Inc., 2006.
- MYERS, S. C. **Determinants of Corporate Borrowing**. Journal of Financial Economics, Novembro 1977.
- NEVES, C. **Avaliação de um Investimento em Pesquisa Adicional num Novo Processo de Produção: Considerações Metodológicas e uma Aplicação**. Prod., v. 2, n. 2, p. 145-155, 1992.
- PAXON, D. A. **Real R&D Options**. Burlington, MA, USA: Butterworth-Heinemann (Elsevier Science), 2003.
- PERLITZ, M. . P. T. . S. R. **Real Option Valuation: The New Frontier in R&D Project Evaluation?**. R&D Management, v. 29, n. 3, p. 255-269, 1999.
- RESOLUÇÃO ANP n°50/ 2015, publicada no DOU n° 228 de 30/11/2015.
- RIGOLON, F. J. Z. **Opções Reais e Análise de Projetos**. BNDES. Rio de Janeiro, p. Texto para discussão n° 66. Março de 1999.
- SAMANEZ, C. P. **Gestão de Investimentos e Geração de Valor**. São Paulo, Brasil: Pearson Prentice Hall, 2007.
- SANTIAGO, L. P.; VAKILI, P. **On the Value of Flexibility in R&D Projects**. Management Science, n. 51, p. 1206 – 1218, 2005.
- SANTOS, E. M.; PAMPLONA, E. **Teoria das Opções Reais: A Aplicação em Pesquisa e Desenvolvimento (P&D)**. Segundo Encontro Brasileiro de Finanças. Rio de Janeiro: IBMEC. 2002.
- SCHUMACHER, M. D. C. M. F. **O Uso das Opções Reais na Análise Econômica de Projetos do Setor Mineral**. Tese de Mestrado. UFRJ. 2002.

THOMAS, J. E. **Fundamentos de Engenharia do Petróleo**. Rio de Janeiro: Interciência, 2004.

TOURINHO, O. A. F. **The Valuation of Reserves of Natural Resources: An Option Pricing Approach**. Dissertação de PhD, University of California, Berkley, 1979.

TRIGEORGIS, L. **Real Options and Interactions with Financial Flexibility. Financial Management**, 1993.

TRIGEORGIS, L. **Real Options: An Overview in Real Options in Capital Investments: Models, Strategies, and Applications by Lenos Trigeorgis**. Westport: Praeger Publisher, 1995.

TRIGEORGIS, L. **Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation**. Cambridge: The MIT Press, 1996.

YERGEN, D. **O Petróleo: Uma História de Ganância, Dinheiro e Poder**. São Paulo: Editora Scritta, 1992.

Anexo I

TABELA PARA $N(x)$ QUANDO $x \leq 0$

Esta tabela mostra valores de $N(x)$ para $x \leq 0$. Esta tabela pode ser usada com Interpolação. Por exemplo:

$$\begin{aligned} N(-0.1234) &= N(-0.12) - 0.34[N(-0.12) - N(-0.13)] \\ &= 0.4522 - 0.34 \times (0.4522 - 0.4483) \\ &= 0.4509 \end{aligned}$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-3.0	0.0014	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-4.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TABELA PARA $N(x)$ QUANDO $x \geq 0$

Esta tabela mostra valores de $N(x)$ para $x \geq 0$. Esta tabela pode ser usada com interpolação. Por exemplo:

$$\begin{aligned} N(0.6278) &= N(0.62) + 0.78[N(0.63) - N(0.62)] \\ &= 0.7324 + 0.78 \times (0.7357 - 0.7324) \\ &= 0.7350 \end{aligned}$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9685	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9985	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000